
Nome, Cognome, Matricola:

1. Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 x \log(1+x^2) dx$$

Punteggio: 6

$$\log 2 - \frac{1}{2}$$

2. Il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\cos \left(\frac{\sqrt{2}}{n} \right) \right)}{(\sqrt{n+n^4} - n^2)^2}$$

vale ☒ : -4 ☐ : -2 ☐ : -1 ☐ : -8 ☐ : 0**Punteggio: 7**

3. Determinare per quali valori del parametro
- $\alpha \in \mathbb{R}$
- la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\cos(x^{\alpha-3})) & \text{se } x > 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ \log(1+|x|^x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ammette la discontinuità di tipo salto in $x = 0$.**Punteggio: 7**

$$\alpha > 3$$

4. Determinare l'insieme degli
- $z \in \mathbb{C}$
- tali che il numero complesso

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^{10}}{4(2e^{\frac{\pi}{6}i}-2i)^7} \left(z^2 + e^{\frac{3}{2}\pi i} \right)$$

abbia parte immaginaria nulla.

Punteggio: 6
$$\text{vedi pagina 2}$$

5. Sia
- $\alpha > 0$
- . Allora la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha^2 - 3}{2} \right)^n \frac{1}{n \log(n^5 + n)}$$

converge se e solo se

☐ : $1 < \alpha < \sqrt{5}$ ☐ : $1 < \alpha \leq \sqrt{5}$ ☒ : $1 \leq \alpha < \sqrt{5}$ ☐ : $1 \leq \alpha \leq \sqrt{5}$ ☐ : $0 < \alpha < \sqrt{5}$ **Punteggio: 6**

Es. 4: $1 + i\sqrt{3} = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\Rightarrow (1 + i\sqrt{3})^{10} = 2^{10} e^{i\frac{10}{3}\pi}$$

$$= 2^{10} \underbrace{e^{i\pi}}_{-1} e^{i\frac{\pi}{3}} = -2^{10} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$2 e^{\frac{\pi}{6}i} - 2i = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i}{2} \right) - 2i$$

$$= \sqrt{2} - i = \underline{2 e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$

$$\rightarrow 4 (2 e^{\frac{\pi}{6}i} - 2i)^7 = 4 \cdot 2^7 e^{-i\frac{7}{6}\pi}$$

$$= 2^9 e^{-i\frac{7}{6}\pi}$$

Quindi

$$\frac{(1 + i\sqrt{3})^{10}}{4 (2 e^{\frac{\pi}{6}i} - 2i)^7} = \frac{-2^{10} e^{i\frac{\pi}{3}}}{2^9 e^{-i\frac{7}{6}\pi}}$$

$$= -2 e^{\frac{9\pi}{6}i} = -2 \underbrace{e^{\frac{3\pi}{2}i}}_{-i} = \underline{2i}$$

$z = x + iy$

$$\Rightarrow 2i (z^2 + e^{\frac{3\pi}{2}i}) = 2i (x^2 - y^2 + 2ixy - i)$$

$$= 2i(x^2 - y^2) + 2 - 4xy$$

$$\Rightarrow \text{parte immaginaria} = 2(x^2 - y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = y^2$$

$\Rightarrow$ unione di 2 rette:

$$\underline{x = y \quad \text{e} \quad x = -y}$$