Nome, Cognome, Matricola:

Tempo a disposizione: 90 minuti

1. Il luogo degli $z \in \mathbb{C}$ tali che il numero complesso

$$\frac{\mathrm{Re}\left(z - (1 + i\sqrt{3})^7\right) + \mathrm{Im}\left(|z|^2 e^{i\frac{\pi}{2}} - 1\right)}{||z|^2 - 4|}$$

è ben definito ed è reale non negativo è dato da

$\boxed{\text{A}}$: una circonferenza $\boxed{\text{B}}$: un cerchio $\boxed{\text{C}}$: unione di due corfonferenze $\boxed{\text{D}}$: un cerchio privato di una circonferenza $\boxed{\text{E}}$: unione di due cerchi

Risposta: D,

---

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} \log(1 + e^{-2/x^2}) & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ \dfrac{2 - 2\cos(x)}{\arctan(x^\alpha)} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Allora f ha un punto angoloso in $x = 0$ se e solo se

$\boxed{\text{A}}$: $\alpha > 1$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha > 2$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha \geq 1$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha = 2$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha \geq 2$

Risposta: C,

---

3. Il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}\right)^x$$

vale $\boxed{\text{A}}$: e^2 $\boxed{\text{B}}$: e $\boxed{\text{C}}$: e^3 $\boxed{\text{D}}$: $\sqrt{e}$ $\boxed{\text{E}}$: 0

Risposta: A

---

4. L'integrale
$$\int_0^{\pi/2} \frac{(1+\sin x)\cos x}{\sin^2 x + 2\sin x + 2}\ dx$$
vale

$\boxed{\text{A}}$: $\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: π $\boxed{\text{C}}$: $\frac{1}{2}\log\left(\frac{5}{2}\right)$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{1}{2}\log 2$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{1}{2}\log 3$

Risposta: C

---

5. La serie numerica
$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\sqrt{n^\alpha + n^2} - n\right)$$

converge se e solo se $\boxed{\text{A}}$: $\alpha \leq 1$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha < 1$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha \leq 2$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha < 2$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha < 0$

Risposta: C

---

6. Sia $\tilde{y}$ la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{aligned} y'' + y &= x^2 \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Allora $\tilde{y}(2\pi)$ vale

$\boxed{\text{A}}$: $4\pi^2 - 2$ $\boxed{\text{B}}$: 0 $\boxed{\text{C}}$: $4\pi^2 - 1$ $\boxed{\text{D}}$: $4\pi^2$ $\boxed{\text{E}}$: $4\pi^2 + 1$
