
Nome, Cognome, Matricola:

Tempo a disposizione: 90 minuti

1. Le radici quarte del numero complesso

$$w = \left(|2 + 2i|^2 \frac{1 - \sqrt{3}i}{i} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{4 - 4i} \right) \right)^6$$

sono date da

$$\boxed{\text{A}} : z_k = \sqrt{8} \exp \left(i \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right), k \in \{0, 1, 2, 3\} \quad \boxed{\text{B}} : z_k = \sqrt{8} \exp \left(i \frac{\pi + k\pi}{4} \right), k \in \{0, 1, 2, 3\} \quad \boxed{\text{C}} : z_k = \sqrt{2} \exp \left(i \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right), k \in \{0, 1, 2, 3\} \quad \boxed{\text{D}} : z_k = \sqrt{2} \exp \left(i \frac{\pi + k\pi}{4} \right), k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\boxed{\text{E}} : z_k = \sqrt{6} \exp \left(i \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right), k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Risposta: A, **Punteggio: 6**

2. Sia $\alpha \geq 0$ e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^2) - (\arctan(x))^2}{x^2} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ \frac{e^x - \cos(\alpha x) - \sin(x+x^2)}{x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Allora f è continua in $x = 0$ se e solo se

$$\boxed{\text{A}} : \alpha = 0 \quad \boxed{\text{B}} : \alpha = 2 \quad \boxed{\text{C}} : \alpha = 1 \quad \boxed{\text{D}} : \alpha = \frac{1}{2} \quad \boxed{\text{E}} : \alpha = \frac{3}{2}$$

Risposta: C, **Punteggio: 6**

3. L'integrale

$$\int_0^1 \arctan(\sqrt{x}) \, dx$$

vale

$$\boxed{\text{A}} : \frac{\pi}{2} - 1 \quad \boxed{\text{B}} : \frac{\pi}{2} \quad \boxed{\text{C}} : \pi - 1 \quad \boxed{\text{D}} : \frac{\pi}{2} + 1 \quad \boxed{\text{E}} : \pi + 1$$

Risposta: A, **Punteggio: 6**

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. La serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)! \sin\left(\frac{1}{(n-2)!}\right) \left(1 + \frac{\alpha-1}{n}\right)^{n^2}$$

converge se e solo se ☐A : $\alpha \leq 1$ ☐B : $\alpha < 1$ ☐C : $\alpha < 2$ ☐D : $\alpha \geq 2$ ☐E : $\alpha \leq 2$

Risposta: B, **Punteggio:** 7

5. Sia $\tilde{y}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned}(1+x^2)y' &= -2xy^2 \\ y(0) &= 1.\end{aligned}$$

Allora il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{y}(x) \log(x)$$

vale

☐A : ∞ ☐B : 0 ☐C : 1 ☐D : 2 ☐E : $\frac{1}{2}$

Punteggio: 7
