Numeri naturali

18.9.2023

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, \}$

Operazioni interne: somma e prodotto:

$\forall\, n_1, n_2 \in \mathbb{N}: \quad n_1 + n_2 \in \mathbb{N} \quad e \quad n_1 \cdot n_2 \in \mathbb{N}$

$\forall$ → quantificatore universale: "per ogni"

Oss.: ogni numero naturale n ha in $\mathbb{N}$ il suo unico successore, cioè il più piccolo numero naturale maggiore di n:

$0 \mapsto 1, \quad 1 \mapsto 2, \quad$ etc.

Principio di induzione: sia $P(n)$ un'affermazione dipendente da $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1. $P(0)$ è vera

2. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$

   $\hookrightarrow$ implicazione

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

Esempio : $P(n)$: $2^n > n$

Applico il principio di induzione:

1. $P(0)$: $2^0 = 1 > 0$ è vera

2. Suppongo che valga $2^n > n$

e devo dimostrare che $2^{n+1} > n+1$

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = \underbrace{2^n}_{\geq 1} + 2^n \geq \underbrace{2^n}_{> n} + 1 > n+1$$

$$\hookrightarrow \quad 2^{n+1} > n+1$$

Per il principio di induzione:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad 2^n > n$$

Il principio di induzione può essere formulato partendo da $n_0 > 0$ al posto di 0:

Se valgono

1) $P(n_0)$ è vera

2) $\forall n \geq n_0$: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$

Esempio:

$$P(n)\,,\; n \geq 1 : \quad \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1) per $n = 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 \quad ; \quad \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

è vera

2) $\forall n \geq 1$: suppongo che $P(n)$ sia vera e dimostro $P(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Quindi
$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}}_{\overset{\parallel}{\frac{n(n+1)}{2}}} + n+1 \qquad \Leftarrow P(n)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

$$= \frac{(n+1)}{2}(2+n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$\Rightarrow$ $P(n)$ è vera per $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$

Esercizio: dimostrare che

$$\forall n \geq 1: \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Numeri interi

$$\mathbb{Z} = \{\ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$$

Operazioni interne: $+, -, \cdot$

Numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ q = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$$

Operazioni interne: $+, -, \cdot, :$ (divisione)

Su $\mathbb{Q}$ è definita la relazione $\leq$ (minor uguale) che soddisfa:

1. $\forall x \in \mathbb{Q}: \quad x \leq x$ (riflessività)
2. $\forall x, y \in \mathbb{Q}: \quad x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimmetria)
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}:$ $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transcitività)
4. $\forall x, y \in \mathbb{Q}: \quad x \leq y$ o $y \leq x$ (totalità)

Quindi $\leq$ è una relazione d'ordine totale che rende il campo $(\mathbb{Q}, \leq)$ un campo totalmente ordinato.

19.9.2023

$$P(n): \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1) $P(1)$: $\sum_{k=1}^{1} 1^2 = 1$, $\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1$ vera

2) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: devo dimostrare che dal $P(n)$ segue

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$= \frac{n+1}{6}\left(2n^2+7n+6\right)$$

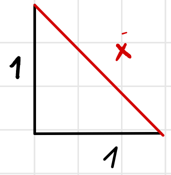
Scrivo

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{\overset{P(n)}{=}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n+1}{6}\left(6(n+1) + n(2n+1)\right)$$

$$= \frac{n+1}{6}\left(2n^2 + 7n + 6\right)$$

$\Rightarrow$ $P(n)$ è vera $\forall\, n \geq 1$



$x^2 = 1 + 1 = 2$

Teorema: sia x tale che $x^2 = 2$.
Allora $x \notin \mathbb{Q}$.

Dim.: supponiamo, per assurdo, che $x \in \mathbb{Q}$. Allora $\exists\ m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, tali
"esiste"

che
$$x = \frac{m}{n}$$

Possiamo suppore che n e m non siano entrambi pari.

Se $x^2 = 2$, allora $m^2 = 2n^2$ $\Rightarrow$

m^2 è un numero pari $\Rightarrow$ m è pari

$\Rightarrow$ m^2 è divisibile per 4 $\Rightarrow$ $m^2 = 4k$, $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $n^2 = 2k$ $\Rightarrow$ n^2 è pari $\Rightarrow$ n è pari contraddizione e quindi $x \notin \mathbb{Q}$.

Numeri reali

Def.: sia K un campo dotato con la relazione $\leq$ e K totalmente ordinato. Allora $(K, \leq)$ si dice **completo** se viene soddisfatto l'assioma di completezza:

$\forall A \subseteq K$, $B \subseteq K$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ vale:

se $\forall x \in A$ e $\forall y \in B$: $x \leq y$,

allora $\exists c \in K$ tale che

$$\forall x \in A \text{ e } \forall y \in B : \quad x \leq c \leq y$$

c .... **elemento separatore** tra A e B.

Def.: l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ è una estensione di $\mathbb{Q}$ tale che il campo $(\mathbb{R}, \leq)$ è totalmente ordinato e completo.

N.B: se $x \in \mathbb{R}$ e $x \notin \mathbb{Q}$, allora x è irrazionale.

Il campo $(\mathbb{Q}, \leq)$ non è completo. Infatti, consirando gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 \leq 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 \geq 2\}$$

Allora, vale:

$$\forall x \in A \text{ e } \forall y \in B : \quad x \leq y$$

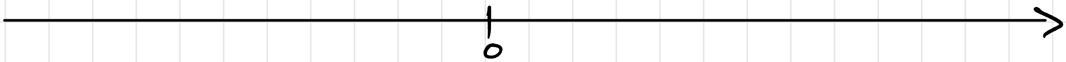
Però non esiste alcun elemento separatore $c \in \mathbb{Q}$ tale che

$$\forall x \in A, y \in B : \quad x \leq c \leq y \qquad (*)$$

Infatti, dal $(*)$ segue $c^2 = 2$

Rappresentazione geometrica di numeri reali

retta reale



1) ad ogni punto della retta corrisponde un unico numero reale.

2) ogni numero reale può essere univocamente associato ad un punto della retta.

Minimi e massimi

Def.: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che A è limitato se $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x \in A: \quad |x| \leq M$$

Ricordo
$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Def.: sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

1) se $\exists$ $a \in A$ tale che

$\forall x \in A: \quad a \leq x$

allora diciamo che a è minimo di A

e scriviamo $a = \min A$

2) se $\exists$ $b \in A$, tale che

$\forall x \in A: \quad x \leq b$,

allora diciamo che b è massimo di A

e scriviamo $b = \max A$.

N.B.: esistono insiemi limitati che non ammettono né minimo né massimo.

Esempio: $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$

Lemma (unicità di min e max): sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Se A ammette minimo e/o massimo, allora essi sono unici.

Dim dimostriamo l'unicità del massimo:

supponiamo che esistano $b \in A$ e $b' \in A$

tali che

(1) $\forall x \in A: \quad x \leq b$

(2) $\forall x \in A: \quad x \leq b'$

---

applico (1) con $x = b'$ $\Rightarrow b' \leq b$
applico (2) con $x = b$ $\Rightarrow b \leq b'$
$\Rightarrow b = b'$

Esercizio: dimostrare l'unicità del minimo

Maggioranti e minoranti

Def.: sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

(1) Se $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che

$\forall x \in A: \quad x \leq M$, allora

chiamiamo M un maggiorante di A

(2) Se $\exists m \in \mathbb{R}$ tale che

$\forall x \in A: \quad m \leq x$, allora

chiamiamo m minorante di A.

$M(A) = \{x \in \mathbb{R} : x$ è un maggiorante di $A\}$

$m(A) = \{x \in \mathbb{R} : x$ è un minorante di $A\}$

Def.: sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Se $M(A) \neq \emptyset$, allora diciamo che A è superiormente limitato.

Se $m(A) \neq \emptyset$, allora diciamo che A è inferiormente limitato.

Esempio: $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$

Maggioranti:

$M(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$

$M(B) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$

$M(C) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$

$M(D) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$

$\Rightarrow \quad \min M(A, B, C, D) = 1$

Minoranti

$$m(A) = m(B) = m(C) = m(D) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$$

$$\Rightarrow \quad \max m(A, B, C, D) = 0$$

Teorema: sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

① Se A è superiormente limitato, allora $M(A)$ ammette minimo.

② Se A è inferiormente limitato, allora $m(A)$ ammette massimo.

21.9.2023

Dim.: dimostriamo ②:

consideriamo gli insiemi:

$\emptyset \neq m(A)$ e $A \neq \emptyset$ e inoltre vale

$\forall x \in m(A)$ e $\forall y \in A$: $x \leq y$

Per l'assioma di completeza esiste un $c \in \mathbb{R}$ tale che

$\forall x \in m(A)$ e $\forall y \in A$: $x \leq c \leq y$

$\Rightarrow \quad c \in m(A)$

$\Rightarrow \quad c = \max m(A).$

Dimostrazione di (1): esercizio

Def: sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

(1) Se $M(A) \neq \emptyset$, allora chiamiamo

$$\sup A = \min M(A)$$

estremo superiore di A.

(2) Se $m(A) \neq \emptyset$, allora chiamiamo

$$\inf A = \max m(A)$$

estremo inferiore di A.

N.B.:

1) Se $\sup A \in A$, allora

$$\sup A = \max A$$

2) Se $\inf A \in A$, allora

$$\inf A = \min A$$

3) Se $M(A) = \emptyset$ (A è superiormente

illimitato), allora poniamo

$$\sup A = +\infty$$

4) Se $m(A) = \emptyset$ (A è inferiormente illimitato), allora poniamo

$$\inf A = -\infty$$

Esempio: Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n},\ n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}\}$

$\max A = 1 \qquad (n = 1)$

A non ammette minimo.

$\inf A = 0$ perché $m(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$

$\forall x \in A : x > 0$

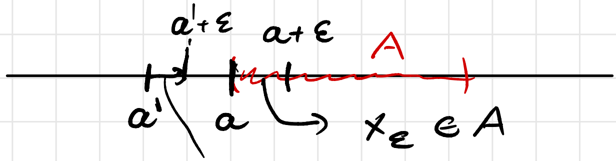
Dall'altra parte, se $x > 0$, allora $x \notin m(A)$

Infatti, per n sufficientemente grande si ha $\frac{1}{n} < x$.

Caratterizzazione di sup e inf.

Lemma: sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Supponiamo che $m(A) \neq \emptyset$. Allora vale

$$a = \inf A \iff \begin{cases} ① \ \forall x \in A : a \leq x \\ ② \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in A : x_\varepsilon < a + \varepsilon \end{cases}$$



Dim.:

1) supponiamo che $a = \inf A$. Dobbiamo dimostrare che a soddisfa 1, 2.

$a = \inf A \Rightarrow a \in m(A) \Rightarrow$ 1

Supponiamo che 2 sia falsa (per assurdo):

$\exists\, \varepsilon > 0 : \forall x \in A : \quad x \geq a + \varepsilon$

$\Rightarrow \quad a + \varepsilon \in m(A) \Rightarrow$ contraddizione

con il fatto che $a = \max m(A)$

$(a + \varepsilon > a)$. $\Rightarrow$ 2 è vera.

---

2) supponiamo che a soddisfi 1 e 2 e dimostriamo che $a = \inf A$.

1 $\Rightarrow \quad a \in m(A)$.

Suppongo, per assurdo, che $\exists\, a' \in m(A)$ tale che $a' > a$.

pongo $\varepsilon = a' - a > 0$

$\forall x \in A : \quad a' \leq x$

$\Rightarrow \quad a + \varepsilon \leq x \quad \forall x \in A \Rightarrow$

contraddizione con 2.

Quindi $\forall a' \in m(A): \ a' \leq a \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad a = \max m(A) \Rightarrow \quad a = \inf A.$

Lemma: sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Supponiamo che $M(A) \neq \emptyset$. Allora vale

$$b = \sup A \iff \begin{cases} 1 \ \ \forall x \in A: \ x \leq b \\ 2 \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in A: \ x_\varepsilon + \varepsilon > b \end{cases}$$

Insieme $\overline{\mathbb{R}}$

Def: chiamiamo

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

insieme di numeri reali estesi.

Relazione d'ordine $\leq$ e operazioni somma e prodotto in $\overline{\mathbb{R}}$:

1 $\quad \leq$: $\quad \forall x \in \mathbb{R}: \quad -\infty < x < +\infty$

$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}: \quad -\infty \leq x \leq +\infty$

② somma: i) $\forall x \in \mathbb{R}$: $x + \infty = +\infty$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}$: $x - \infty = -\infty$

iii) $+\infty + \infty = +\infty$

iv) $-\infty - \infty = -\infty$

---

③ Prodotto: i) $\forall x > 0$, $x \in \mathbb{R}$: $x \cdot (+\infty) = +\infty$

: $x \cdot (-\infty) = -\infty$

ii) $\forall x < 0$, $x \in \mathbb{R}$: $x \cdot (+\infty) = -\infty$

: $x \cdot (-\infty) = +\infty$

iii) $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$

$(+\infty)(-\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$

Non sono definite le seguenti operazioni:

$+\infty - \infty$, $0 \cdot (+\infty)$ e $0 \cdot (-\infty)$.

Intervalli

Def.: un insieme $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ si dice intervallo se vale:

$$\forall x, y \in I: \quad x < z < y \Rightarrow z \in I.$$

Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$. Chiamiamo

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$(]a, b[)$ intervallo aperto di estremi a e b.

$[a, b] = \{ x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x \leq b \}$

intervallo chiuso

$(a, b] = \{ x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x \leq b \}$

intervallo semi-aperto a sinistra

$[a, b) = \{ x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x < b \}$

intervallo semi-aperto a destra