



Numeri complessi

Motivazione: dare senso, per esempio, alla formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

per le soluzioni dell'equazione quadratica

$$\underline{ax^2 + bx + c = 0}$$

nel caso in cui $b^2 < 4ac$

se $a > 0$:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

//

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\underline{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Def.: chiamiamo unità immaginaria

il numero i che soddisfa

$$i^2 + 1 = 0$$

N.B.: $i \notin \mathbb{R}$

Def.: un numero complesso z è un oggetto della forma

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

dove

$x = \operatorname{Re}(z)$ è la parte reale di z

$y = \operatorname{Im}(z)$ è la parte immaginaria di z

$z = x + iy \dots$ Forma algebrica

del numero complesso z

Def.:

$$\mathbb{C} = \{ z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$$

insieme di numeri complessi

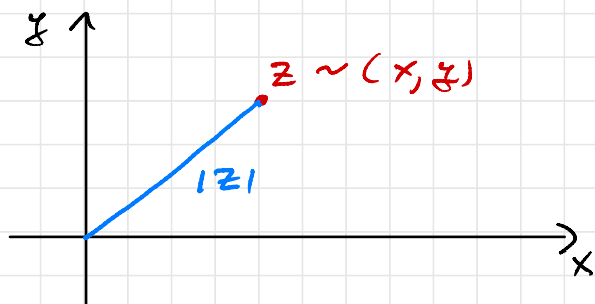
N.B.:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Identificazione con $\mathbb{R}^2$

22.9.2023

Ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$ può essere univocamente associato ad una coppia ordinata $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:



Operazioni in $\mathbb{C}$

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

1, somma:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

2, prodotto:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = \\ &= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 + \overset{-1}{\overbrace{i^2}^{= -1}} y_1 y_2 \\ &= \underline{x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)} \end{aligned}$$

3, inversione: $z = x + iy, \quad z \neq 0$

$$\text{N.B.: } z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{1}{z}} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+ixy-ixy+y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

4, coniugio: sia $z = x + iy$. Allora chiamiamo $\bar{z} = x - iy$ il complesso coniugato di z .

Proprietà:

- 1, $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- 2, $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- 3, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

4, $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$

Def.: sia $z = x + iy$. Chiamiamo

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

modulo di z .

N.B.: se $y = 0$: $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$

↓
valor assoluto

Forma trigonometrica di numeri complessi

il numero complesso z viene identificato con una coppia $(\rho, \theta) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$ tale che

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \Rightarrow \rho = |z|$$

$\theta = \arg(z)$ argomento di z soddisfa:

$$(*) \quad \begin{cases} \sin(\theta) = \frac{y}{|z|} \\ \cos(\theta) = \frac{x}{|z|} \end{cases} ; \quad \begin{aligned} y &= \operatorname{Im}(z) \\ x &= \operatorname{Re}(z) \end{aligned}$$

Allora

$$\underline{z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)}$$



forma trigonometrica di z

N.B.: $\sin$ e $\cos$ sono 2π -periodiche.

Quindi $\theta = \arg(z)$ **NON** è univocamente determinata dalle equazioni (*).

Formule di De Moivre: siano

$$z_1 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

prodotto :

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

$$= \rho_1 \rho_2 \left[\underbrace{\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2}_{\parallel \cos(\theta_1 + \theta_2)} + i \left(\underbrace{\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1}_{\parallel \sin(\theta_1 + \theta_2)} \right) \right]$$

$$= \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Più in generale, se

$$z_j = \rho_j (\cos \theta_j + i \sin \theta_j), \quad j = 1, \dots, n$$

allora

$$\underline{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n [\cos(\theta_1 + \dots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \dots + \theta_n)]}$$

Formula di De Moivre.

In particolare, se

$$z_1 = z_2 = \dots = z_n = z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta),$$

allora

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = \underline{z^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]}$$

Esempio: determinare la forma algebrica

$$\text{di } (1+i)^7$$

$$z = 1+i, \Rightarrow |z| = \sqrt{2}, \quad x = y = 1$$

$$\theta = \arg(z): \quad \left. \begin{array}{l} \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (1+i)^7 &= z^7 = (\sqrt{2})^7 \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right) \\ &= 8\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \underline{8(1-i)} \end{aligned}$$

25.9.2023

Esponenziale complesso

Def.: dato un numero complesso $z = x + iy$,

chiamiamo

$$\underline{e^z = e^x (\cos y + i \sin y)}$$

esponenziale complesso di z .

N.B.: $1, \quad e^z \neq 0 \quad \forall \quad z \in \mathbb{C}$

2, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, allora

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

3, $|e^z| = e^x$

Caso particolare: $z = i\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, allora

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Formula di Eulero

Esempi: $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

Più in generale:

$$\forall k \in \mathbb{Z}: \underline{e^{2\pi ki} = 1}, \quad \underline{e^{(2k+1)\pi i} = -1}$$

Quindi ad esempio,

$$e^{249\pi i} = \underbrace{e^{248\pi i}}_{=1} \underbrace{e^{\pi i}}_{=-1} = -1$$

$$e^{\frac{129}{2}\pi i} = \underbrace{e^{\frac{128}{2}\pi i}}_{=1} \underbrace{e^{\frac{\pi}{2}i}}_{=i} = i$$

Ricordo: forma trigonometrica di z

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta), \quad \rho = |z|, \quad \theta = \arg(z)$$

F. d. Eulero: $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$

da cui la **forma esponenziale** di z :

$$z = \rho e^{i\theta}, \quad \rho = |z|, \quad \theta = \arg(z)$$

Operazioni con la forma esponenziale:

dati $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$, si ha

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\rho_2 \neq 0: \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

In particolare, per $z = \rho e^{i\theta}$ e $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$z^n = \rho^n e^{in\theta}$$

Esempio: sia $z = -1 + i$, calcolare z^{13} .

scrivo z nella forma esponenziale:

$$|z| = \sqrt{2}, \quad \theta = \arg(z): \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{quindi} \quad z = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\begin{aligned}
 z^{13} &= (\sqrt{2})^{13} e^{\frac{13}{4} \cdot 3\pi i} \\
 &= 2^6 e^{i \frac{13}{4} \cdot 3\pi} \sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}} \\
 &= \underline{2^6 (1-i)}
 \end{aligned}$$

Oss.:

$$\begin{aligned}
 \theta = \arg(z) \Rightarrow \theta + 2\pi k &= \arg(z) \\
 \forall k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z^n &= \rho^n e^{in(\theta + 2\pi k)} = \rho^n e^{in\theta} e^{2\pi n k i} \\
 &= \underline{\rho^n e^{in\theta}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Radice n-sima di un numero complesso

Def.: sia $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Allora chiamiamo **radice n-sima** di z **ogni numero complesso** w tale che

$$\underline{w^n = z}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Oss.: dato $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho = |z|$, $\theta = \arg(z)$, denotiamo

$$\underline{w_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2\pi k}{n}}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Allora per ogni $k \geq 0$ si ha

$$\begin{aligned} w_k^n &= \rho e^{i(\theta + 2\pi k)} = \rho e^{i\theta} \underbrace{e^{i2\pi k}}_{1} \\ &= \rho e^{i\theta} = z \end{aligned}$$

Quindi tutti i w_k sono radici n -esime di z ! Però solo n di loro sono distinti:

$$k=0: w_0 = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta}{n}}$$

$$\vdots$$
$$k=n-1: w_{n-1} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2\pi(n-1)}{n}}$$
$$= \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta - 2\pi}{n}}$$

$$k=n: w_n = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2\pi n}{n}}$$
$$= \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta}{n}} \underbrace{e^{i2\pi}}_{1} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta}{n}} = w_0$$

etc.:

$$w_{n+1} = w_1 \text{ etc. ...}$$

Teorema: ogni numero $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$

ammette n radici n -esime distinte
date dalla formula

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

dove $\rho = |z|$ e $\theta = \arg(z)$.

N.B.: l'insieme delle radici n -esime di z ,
cioè

$$\{w_k, k = 0, \dots, n-1\}$$

è indipendente dalla scelta di $\theta = \arg(z)$.

E.s.: $z = -1, \Rightarrow z = e^{i\pi}$

$$n=2 \Rightarrow w_0 = i, w_1 = -i$$

$$\{i, -i\}$$

$$-1 = e^{3\pi i} \Rightarrow w_0 = -i, w_1 = i$$
$$\{-i, i\}$$

Significato geometrico dato $z \neq 0$, le
radici n -esime di z coincidono con i

vertici di un poligono regolare di n lati
inscritto nella circonferenza di raggio
 $\sqrt[n]{|z|}$ e di centro 0 .

Esempi 1, calcolare le radici cubiche di
 $z = -1$ $\rightarrow n=3$

scrivo

$$z = -1 = e^{i\pi} ; \quad |z| = 1, \quad \theta = \pi$$

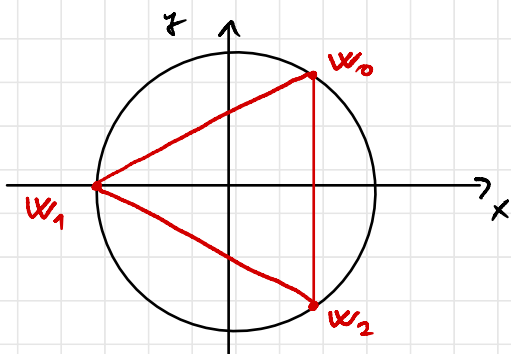
Quindi:

$$w_k = e^{i \frac{\pi + 2\pi k}{3}} ; \quad k = 0, 1, 2$$

$$k=0: \quad w_0 = e^{i \frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ = \underline{\underline{\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

$$k=1: \quad w_1 = e^{i\pi} = \underline{\underline{-1}}$$

$$k=2: \quad w_2 = e^{i \frac{5\pi}{3}} = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \\ = \underline{\underline{\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}}}$$



$$\text{N.B.: } w_2 = \overline{w_0}$$

2, Calcolare le radici quarte di $z = -1$

$$z = e^{i\pi} \quad ; \quad n = 4$$

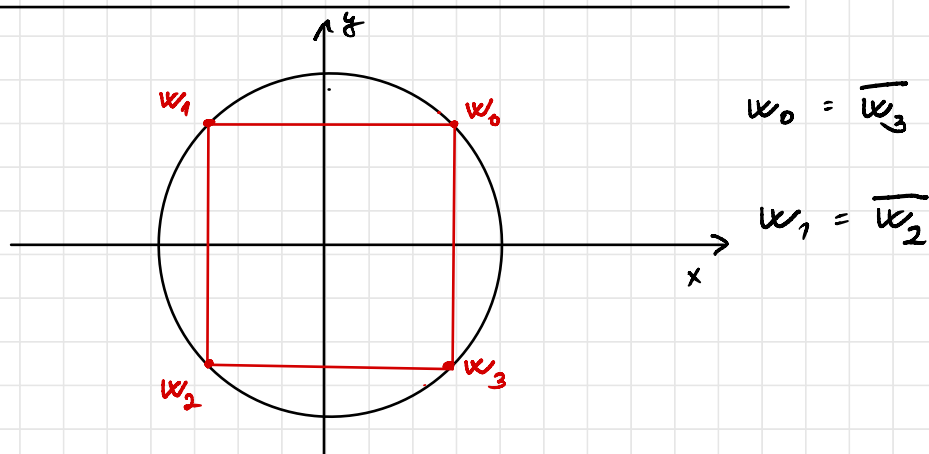
$$w_k = e^{i \frac{\pi + 2\pi k}{4}} \quad , \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$k=0: \quad w_0 = e^{i \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i)$$

$$k=1: \quad w_1 = e^{i \frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1 + i)$$

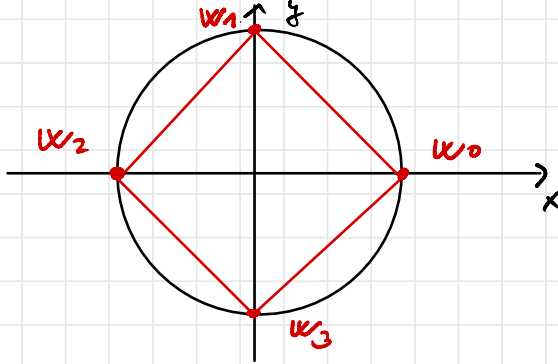
$$k=2: \quad w_2 = e^{i \frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1 - i)$$

$$k=3: \quad w_3 = e^{i \frac{7\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - i)$$



3, Calcolare le radici quarte di $z = 1$.

Risposta: $\{1, i, -1, -i\}$



$$w_1 = \overline{w_3}$$

Polinomi complessi

Def.: chiamiamo

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

dove $z \in \mathbb{C}$, $a_j \in \mathbb{C}$

un polinomio complesso di z .

Se $a_n \neq 0$, allora diciamo che P_n è
un polinomio di **grado n** .

I numeri $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, \dots, n$ sono

i **coefficienti** del polinomio P_n .

Principio di identità fra polinomi: due
polinomi di grado n

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

e

$$Q_n(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0$$

sono uguali, cioè

$$\forall z \in \mathbb{C}: P_n(z) = Q_n(z)$$

se e solo se

$$\forall j = 0, \dots, n: a_j = b_j$$

26.9.2023

Def: Sia P_n un polinomio. Chiamiamo **radice** di P_n ogni numero $w \in \mathbb{C}$ tale che

$$P_n(w) = 0$$

Teorema (Fondamentale di algebra): ogni

polinomio P_n con $n \geq 1$ ammette almeno una radice $w \in \mathbb{C}$.

Oss.: dato un polinomio

$$P_n(z) = a_n z^n + \dots + a_0$$

con $a_j \in \mathbb{R} \quad \forall j = 0, \dots, n$ e data una radice $w \in \mathbb{C}$ di P_n , si ha

$$P_n(\overline{w}) = 0$$

In fatti, siccome $a_j \in \mathbb{R}$, per ogni $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
 \text{vale } \overline{P_n(z)} &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} \\
 &= a_n \overline{z}^n + a_{n-1} \overline{z}^{n-1} + \dots + a_1 \overline{z} + a_0 \\
 &\quad (\text{perche' } \overline{a_j} = a_j) \\
 &= a_n (\overline{z})^n + a_{n-1} (\overline{z})^{n-1} + \dots + a_0 \\
 &= P_n(\overline{z}).
 \end{aligned}$$

Quindi $\forall z \in \mathbb{C}: \underline{\overline{P_n(z)} = P_n(\overline{z})}$

Dunque, se $P_n(w) = 0$, allora

$$P_n(\overline{w}) = \overline{P_n(w)} = \overline{0} = 0.$$

Fattorizzazione di Polinomi

Teorema: sia P_n un polinomi di grado $n \geq 2$ e sia w una radice di P_n . Allora esiste un polinomio Q_{n-1} di grado $n-1$ tale che

$$\forall z \in \mathbb{C}: \underline{P_n(z) = (z-w) Q_{n-1}(z)}$$

Corollario (conseguenza): dato un polinomio

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0,$$

esistono n radici $w_1, \dots, w_n$ di P_n

tali che

$$\forall z \in \mathbb{C}: P_n(z) = a_n (z - w_1)(z - w_2) \cdot \dots (z - w_n)$$

Esempio: se $b^2 - 4ac > 0$, allora, $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$a x^2 + b x + c = a(x - x_1)(x - x_2) \text{ dove}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

N.B.: le radici $w_1, \dots, w_n$ possono **non** essere tutte distinte!

Def.: sia P_n un polinomio di grado n e sia w_i una radice di P_n . Chiamiamo **molteplicità** di w_i il numero

$$m_i = \text{numero delle radici uguali a } w_i$$

N.B.: $1, \quad 1 \leq m_i \leq n \quad \forall i$

2, siano $w_1, w_2, \dots, w_k$ tutte le radici distinte di P_n e siano m_j le loro molteplicità. Allora

$$\forall z \in \mathbb{C} : \underline{P_n(z) = a_n (z-w_1)^{m_1} (z-w_2)^{m_2} \dots (z-w_k)^{m_k}}$$

Inoltre,

$$\sum_{j=1}^k m_j = m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$$

Esempi: 1, $P(z) = z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1)$
 $= (z-1)(z+1)(z+i)(z-i)$

$\Rightarrow$ 4 radici distinte : 1, -1, i, -i
con molteplicità 1

2, $P(z) = z^5 + z^3 = z^3(z^2 + 1)$
 $= z^3(z-i)(z+i)$

tre radici distinte : $w_1 = 0$ $m_1 = 3$
 $w_2 = i$ $m_2 = 1$
 $w_3 = -i$ $m_3 = 1$

4. 2. 2019:

$$|\sqrt{3}z + i|^2 = |z - 1|^2$$

$$z = x + iy$$

$$\sqrt{3}z + i = \sqrt{3}x + (\sqrt{3}y + 1)i$$

$$z - 1 = x - 1 + iy$$

$$\Rightarrow |\sqrt{3}z + i|^2 = 3x^2 + (\sqrt{3}y + 1)^2$$
$$= 3x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{3}y + 1$$

$$|z - 1|^2 = (x - 1)^2 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2$$

Quindi $3x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{3}y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2$

$$2x^2 + 2x + 2y^2 + 2\sqrt{3}y = 0 \quad /2$$

$$\underbrace{x^2 + x + \frac{1}{4}}_{(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} + \underbrace{y^2 + \sqrt{3}y + \frac{3}{4}}_{(y + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - \frac{3}{4}} = 0$$

$$\underline{(x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 1}$$

↳ circonferenza

$a \neq 0$:

$$ax^2 + bx = a(x^2 + \frac{b}{a}x)$$

$$= a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a}$$

2.7.2019

$$\begin{cases} (\operatorname{Re} z)^2 - \frac{3}{2}(z + \bar{z}) + 2 \leq 0 & (1) \\ \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$z = x + iy, \quad \operatorname{Re} z = x,$$

$$z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x$$

$$(1) \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0$$

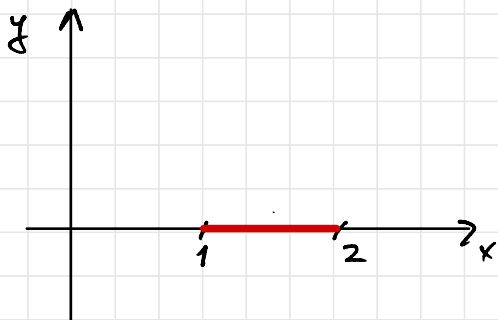
$$\parallel \\ (x-1)(x-2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in [1, 2]$$

$$(2) \Rightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{1}{x+iy}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}\right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)$$

$$= -\frac{y}{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow y=0$$



13.1.2020

$$z = \left(\frac{2}{\sqrt{3} - i} + \frac{1}{i} \right)^6$$

$$\frac{1}{i} = -i$$

$$\frac{2}{\sqrt{3} - i} + \frac{1}{i} = \frac{2(\sqrt{3} + i)}{4} - i$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = v, \quad |v| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$|v| = 1, \quad \theta = -\frac{\pi}{6} \quad \text{oppure} \quad \theta = \frac{11\pi}{6}$$

$$v = e^{i \frac{11\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow v^6 = e^{i 11\pi} = e^{i\pi} = z$$

radici terze di z :

$$w_k = e^{i \frac{\pi + 2\pi k}{3}} \quad k = 0, 1, 2$$

$$\Rightarrow w_0 = e^{i \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_1 = e^{i\pi} = -1$$

$$w_2 = e^{i \frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$