



Calcolo differenziale

Def.: sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e siano $x, x_0 \in A$. Chiamiamo

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

rapporto incrementale
di f tra x e x_0 .

Def.: sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. Se esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

allora chiamiamo

$$\underline{f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

la **derivata** di f nel punto x_0 .

Se inoltre $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, allora diciamo che
la f è **derivabile** in x_0 .

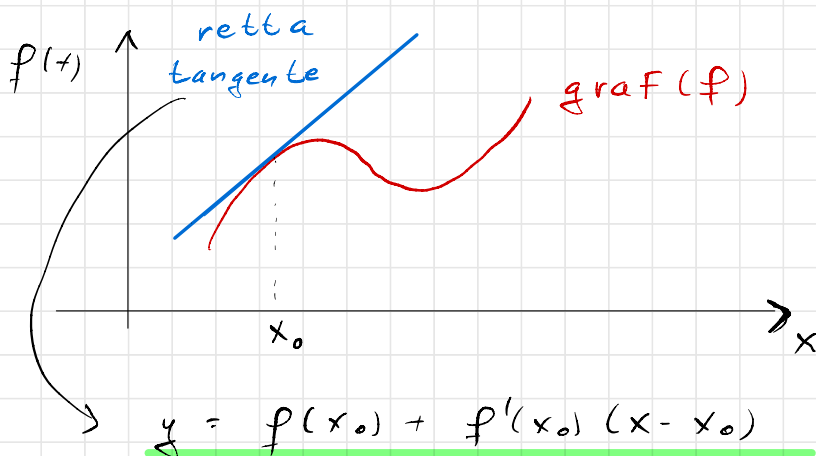
Notazioni alternative:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = Df(x_0) = f^{(1)}(x_0)$$

Significato geometrico: se f è derivabile

in x_0 , allora $f'(x_0)$ coincide con il
coefficiente angolare della retta tangente

al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$:



Def.: sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Denotiamo

$$A' = \{x \in A : f \text{ e' derivabile in } x\}$$

Chiamiamo la derivata di f la funzione

$f': A' \rightarrow \mathbb{R}$ che ad ogni $x \in A'$ associa

il valore $f'(x)$

N.B.:

$$\begin{array}{ccc} A' & \subseteq & A \\ \text{"} & & \text{"} \\ \text{dom}(f') & & \text{dom}(f) \end{array}$$

N.B.:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$$

Esempi: 1, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

f è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x+t)^2 - x^2}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2tx + t^2}{t} = \underline{2x} \end{aligned}$$

2, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(x+t) - \sin(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos t + \sin t \cos x - \sin x}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos t - 1)}{t} + \cos x \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \\ &= \cos x + \sin x \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{t^2} t \\ &= \cos x \end{aligned}$$

Handwritten notes: A red bracket above the limit $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$ is labeled with a red '1'. A red circle around the limit $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{t^2}$ has a red arrow pointing to it labeled with a red $-\frac{1}{2}$.

Derivate di alcune Funzioni elementari

1, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = n x^{n-1} \quad \parallel \quad \text{dom}(f')$$

In particolare, se $f = \text{costante}$, allora $f'(x) = 0$
 $\forall x \in \mathbb{R}$

$$2, \quad f(x) = x^a, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \text{dom}(f) = (0, +\infty) \\ f'(x) = a x^{a-1}, \quad \text{dom}(f') = (0, +\infty)$$

$$3, \quad f(x) = e^x, \quad \text{dom}(f) = \mathbb{R} \\ f'(x) = e^x \quad \text{dom}(f') = \mathbb{R}$$

$$4, \quad f(x) = \log(x), \quad \text{dom}(f) = (0, +\infty) \\ f'(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad \text{dom}(f') = (0, +\infty)$$

$$5, \quad f(x) = \cos x, \quad \text{dom}(f) = \mathbb{R} \\ f'(x) = -\sin x, \quad \text{dom}(f') = \mathbb{R}$$

N.B.: esistono anche funzioni non-derivabili!

Esempi 1, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{per } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{per } x < 0 \end{cases} ;$$

f è derivabile $\forall x \neq 0$. Invece per $x = 0$ si ha

$$f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - \overbrace{f(0)}^{=0}}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$$

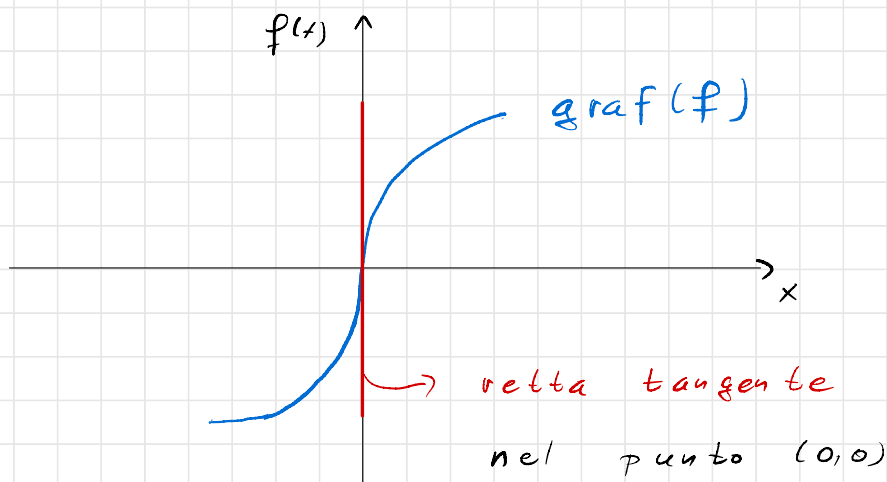
Limite destro: $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t}}{t} =$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}} = +\infty$$

Limite sinistro: $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-\sqrt{-t}}{t} \quad (s = -t)$

$$= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{-\sqrt{s}}{-s} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{s}} = +\infty$$

Conclusione: $f'(0) = +\infty \Rightarrow f$ non è
derivabile in
 $x = 0$



2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, data da $f(x) = |x|$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$
 f è derivabile $\forall x \neq 0$.

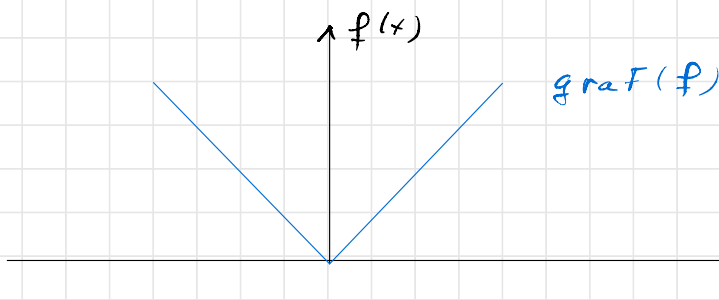
Per $x=0$ si ha

$$f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$$

$$\text{Limite destro: } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{t} = 1$$

$$\text{Limite sinistro: } \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-t}{t} = -1$$

$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \nexists \Rightarrow f$ non ammette derivata
in $x=0$:



Teorema (continuità di funzioni derivabili): sia
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia derivabile
in $x_0 \in A$. Allora f è continua in x_0 .

Dim.:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)$$

$$= f'(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Siccome x_0 è un p.a.c. di A , ne segue che f è continua in x_0 .

Regole di derivazione

Teorema (derivata della somma): siano $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. Allora è derivabile in x_0 anche la funzione $f + g$ e vale

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Teorema (derivata del prodotto): siano $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili in $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. Allora anche la funzione $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e vale

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$$

↳ regola di Leibniz

Dim.:

$$(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0}$$

Scriviamo:

$$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = f(x)(g(x) - g(x_0)) \\ + \underline{g(x_0)(f(x) - f(x_0))}$$

Quindi per algebra

di limiti si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \overbrace{f(x)}^{f(x_0)} \lim_{x \rightarrow x_0} \overbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}^{g'(x_0)} \\ + \underline{g(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \overbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}^{f'(x_0)}} \\ = \underline{f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)}$$

Esempio: 1, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x x^2$

$$\Rightarrow f'(x) = (e^x)' x^2 + (x^2)' e^x \\ = e^x x^2 + 2x e^x \\ = (x^2 + 2x) e^x$$

2, $f(x) = x \sin(x) \log(x)$; $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (x \sin(x))' \log x + x \sin(x) \underbrace{(\log x)'}_{\frac{1}{x}} \\
 &= (x (\sin x)' + \sin x) \log x + \sin(x) \\
 &= \underline{(x \cos x + \sin x) \log x + \sin x}
 \end{aligned}$$

Caso particolare: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, f, g derivabili in x_0 .

Allora

$$\begin{aligned}
 (\alpha f + \beta g)'(x_0) &= (\alpha f)'(x_0) + (\beta g)'(x_0) \\
 &= \underline{\alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)}
 \end{aligned}$$

20.11.2023

Teorema: siano $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni e sia $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) \in B$. Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e vale

$$\underline{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)}$$

Esempi: 1, $(e^f)'(x) = e^{f(x)} f'(x)$

2, $g > 0$, $\Rightarrow (g^f)'(x) = (e^{f \log g})'(x) =$
 $= [f'(x) \log(g(x)) + f(x) \frac{g'(x)}{g(x)}] g(x)^{f(x)}$

Corollario: siano $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili in $x_0 \in \overset{\circ}{A}$.

Se $g(x_0) \neq 0$, allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0

e vale

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Dim:

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$$

Quindi per la formula di Leibniz si ha

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) =$$

$$= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Esempio:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Teorema (derivata della funzione inversa): sia

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ invertibile e sia $f^{-1}: \text{im}(f) \rightarrow A$ la sua inversa. Sia f derivabile in $x_0 \in A$. Se $f'(x_0) \neq 0$, allora f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$ e

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Dim: sia $y_0 = f(x_0)$ e $y = f(x)$

f è invertibile $\Rightarrow f$ è iniettiva $\Rightarrow x \neq x_0 \Rightarrow y \neq y_0$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

Esempi 1, $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

$$f^{-1} = \arcsin$$

$$(\arcsin)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x}$$

$$f(x) = y \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - y^2}$$

$$\Rightarrow \underline{\arcsin(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

$$2, \quad f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \tan x$$

$$\text{im}(f) = \mathbb{R} \Rightarrow f^{-1} = \arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\arctan)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \cos^2 x$$

$$f(x) = \tan x = y \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\Rightarrow \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

Derivate unilateri

Def.: sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \dot{A}$. Se esiste il

limite $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$, allora

esso viene chiamato **derivata destra** di f

in x_0 e denotata con $f'_+(x_0)$.

Analogamente, se esiste $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$,

allora esso viene chiamato **derivata sinistra** di

f in x_0 e denotata con $f'_-(x_0)$.

Teorema: sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \dot{A}$. Allora

f è derivabile in x_0 **se e solo se** f

ammette entrambe le derivate unilateri,

esse sono finite e se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

In tal caso vale

$$\underline{f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)}$$

Attenzione, in generale

$$f'_+(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$$

$$f'_-(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$$

Punti di non-derivabilità

sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in A^\circ$ e supponiamo che f sia continua in x_0 .

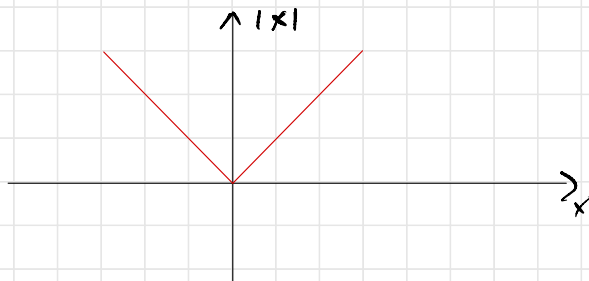
Diciamo che x_0 è un

-punto angoloso di f , se $\exists f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$, almeno una di esse è finita e

$$\underline{f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)}$$

Esempio $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$ è un p.

angoloso: $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$



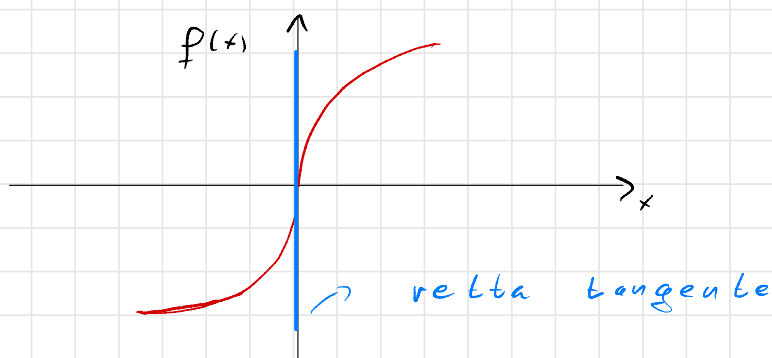
- un punto di non-derivabilità a tangente verticale

$$\text{se } f'(x_0) = +\infty \text{ o } f'(x_0) = -\infty$$

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{per } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

$$f'_+(0) = f'_-(0) = +\infty \Rightarrow f'(0) = +\infty, x_0 = 0$$



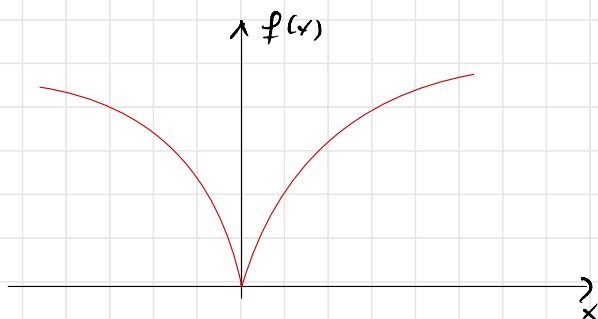
- un punto di cuspide se $f'_+(x_0) \in \{+\infty, -\infty\}$
e $f'_-(x_0) \in \{+\infty, -\infty\}$ e se $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$

Esempio $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x_0 = 0$

$$f'_+(0) = +\infty$$

$$f'_-(0) = -\infty$$

(esercizio)



Minimi e massimi relativi e assoluti

Def.: sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$. Diciamo che x_0 è un punto di

- minimo assoluto di f se

$$\forall x \in A: f(x_0) \leq f(x)$$

- massimo assoluto di f se

$$\forall x \in A: f(x_0) \geq f(x)$$

- minimo relativo di f se $\exists \delta > 0$ tale che

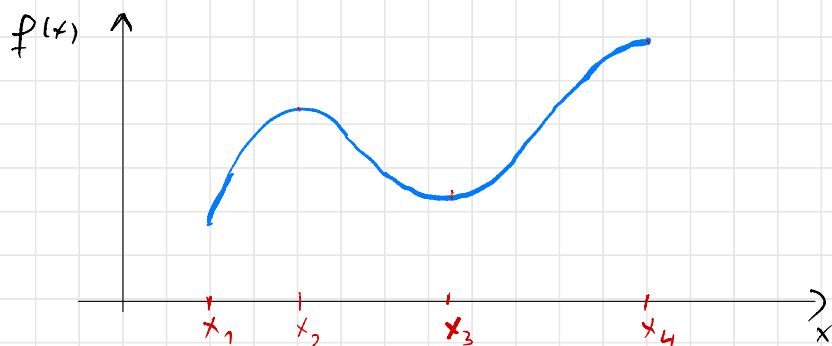
$$\forall x \in I_\delta(x_0) \cap A: f(x_0) \leq f(x)$$

- massimo relativo di f se $\exists \delta > 0$ tale che

$$\forall x \in I_\delta(x_0) \cap A: f(x_0) \geq f(x)$$

N.B.: se x_0 è un p. di minimo (massimo) assoluto, allora x_0 è anche un p. di minimo (massimo) relativo.

Diciamo che x_0 è un punto di estremo relativo di f se x_0 è un p. di minimo o massimo relativo.



$x_2 \dots$ p. di massimo relativo

$x_3 \dots$ p. di minimo relativo

$x_1 \dots$ p. di minimo assoluto

$x_4 \dots$ p. di massimo assoluto

Teorema di Fermat: sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia

$x_0 \in \overset{\circ}{A}$. Supponiamo che x_0 sia un p. di

estremo relativo di f . Se f è derivabile

in x_0 , allora $f'(x_0) = 0$.

Dim: suppongo ad esempio che x_0 sia un p. di

minimo relativo. Considero la derivata

- sinistra di f in x_0 : $\exists \delta > 0$ t. che

$$\forall x \in I_\delta(x_0) : f(x_0) \leq f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \forall x \in I_\delta(x_0) \quad x < x_0$$

$\Rightarrow$ per il Teorema del confronto si ha

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Analogamente, per la derivata destra si

ha: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \forall x \in I_\delta(x_0), x > x_0$

$$\Rightarrow f'_+(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Siccome f è derivabile in x_0 , vale

$$0 \leq f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0) = 0}$$

N.B. 1, Il Teorema di Fermat non si applica nei punti dove f non è derivabile e ne punti $x \in \partial A$.

2, La condizione $f'(x_0) = 0$ è necessaria ma non sufficiente affinché x_0 sia un p.

di estremo relativo: esempio: $f(x) = x^3$

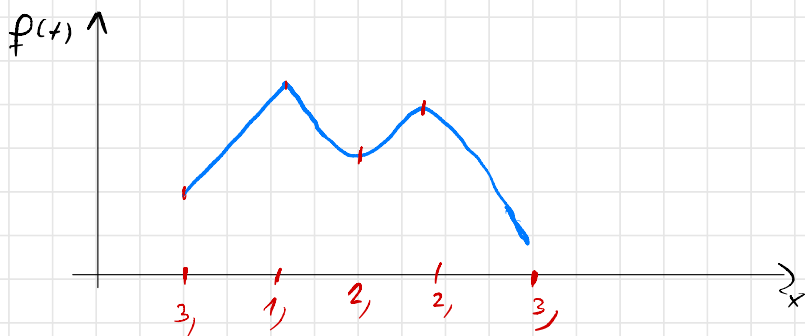
$$\text{soddisfa } f'(0) = 0, \quad f'(x) = 3x^2$$

ma $x_0 = 0$ non è un p. di estremo

relativo

Il Teorema di Fermat dice che i p. di estremo relativo di f vanno cercati tra i punti in cui

- 1, f non è derivabile
- 2, f è derivabile e $f'(x)=0$
- 3, $x \in \partial A$.



Def.: se f è derivabile in x e se $f'(x)=0$, allora diciamo che x è un punto **stazionario** di f .

Teorema di Rolle sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che

- ① f sia continua in $[a, b]$
- ② f sia derivabile in (a, b)
- ③ $f(a) = f(b)$

Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Dom.: per il Teo di Weierstrass esistono

$x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$... p. di minimo e massimo assoluto di f in $[a, b]$.

- Se $x_{\min} \in \{a, b\}$ e $x_{\max} \in \{a, b\}$, allora per l'ipotesi ②: $f(x_{\min}) = f(x_{\max}) \Rightarrow f$ è costante $\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

- Se $x_{\min} \in (a, b)$, allora per il Teorema di Fermat si ha $f'(x_{\min}) = 0$

$\Rightarrow$ pongo $c = x_{\min}$

- Se $x_{\max} \in (a, b)$, allora per il Teorema di Fermat vale $f'(x_{\max}) = 0 \Rightarrow$

pongo $c = x_{\max}$.

Teorema di Lagrange: sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia ① continua in $[a, b]$ ② derivabile in (a, b) .

Allora $\exists c \in (a, b)$ tale che

$$\underline{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Dim : applichiamo il Teorema di Rolle alla

Funzione $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$g(x) = f(x) - (x-a) \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Osservo che 1, g è continua in $[a, b]$

2, g è derivabile in (a, b)

$$3, g(a) = f(a)$$

$$g(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a) = g(a)$$

Quindi il Teorema di Rolle dice che

$\exists c \in (a, b)$ tale che

$$g'(c) = 0.$$

Siccome $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$, ne

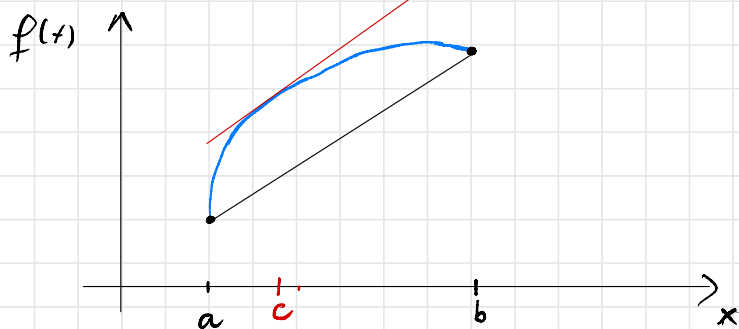
segue la tesi.

Significato geometrico: la retta tangente al

graf(f) nel punto $(c, f(c))$ è parallela al

segmento che congiunge i punti $(a, f(a))$ e

$(b, f(b))$



Teorema della derivata nulla sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Allora f è costante se e solo se
 $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Dim: 1, se f è costante, allora $f'(x) = 0$
 $\forall x \in (a, b)$.

2, Supponiamo che $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Dobbiamo dimostrare che

$$\forall x, y \in [a, b]: \quad f(x) = f(y).$$

Suppongo che $a \leq x < y \leq b$,

Applico il Teorema di Lagrange sull'intervallo

$[x, y] \subseteq [a, b]$: quindi $\exists c \in (x, y)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Se $f'(c) = 0$, si ha $f(x) = f(y)$.

$\Rightarrow f$ è costante.

N.B.: il Teorema non si applica alle funzioni definite sui domini diversi da intervalli.

Esempio: $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \quad \forall x \neq 0$$

Pero f NON è costante in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$f \text{ è costante in } (0, \infty): f(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$f \text{ è costante in } (-\infty, 0): f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

27.11.2023

Teorema (derivata prima e monotonia): sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una derivabile in I . Allora valgono le seguenti affermazioni:

- ① $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \Leftrightarrow f$ è crescente in I , cioè
 $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

② $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ è strettamente crescente
in I , cioè $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

③ $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I \Leftrightarrow f$ è decrescente in I , cioè
 $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

④ $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ è strettamente decrescente
in I , cioè $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Dim.: dimostriamo ① e ②

① a) supponiamo che $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$.

Siano $x, y \in I$ tali che $x < y$. Applica il Teo
do Lagrange alla f sull'intervallo $[x, y]$.

$\Rightarrow \exists c \in (x, y)$ tale che

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) > 0$$

$\Rightarrow f(y) - f(x) > 0 \Rightarrow f$ è crescente.

b) supponiamo che f sia crescente in I , cioè

$\forall x \in I$ si ha $f(x+t) - f(x) \geq 0$ se $t > 0$

$f(x+t) - f(x) \leq 0$ se $t < 0$

Quindi

$$\frac{f(x+t) - f(x)}{t} \geq 0 \quad \forall x \in I$$

$\forall t$ tale $x+t \in I$

Per il Teorema del confronto ne segue

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \geq 0$$

② supponiamo che $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$. Procedo

come nel punto 1a): siano $x, y \in I$ tali che

$x < y$. Applico il Teo di Lagrange

sull'intervallo $[x, y] \Rightarrow \exists c \in (x, y)$ tale

che

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) > 0$$

$$\Rightarrow f(y) > f(x)$$

$\Rightarrow f$ è strettamente crescente.

N.B.: il fatto che f sia strettamente crescente

in I in generale **non implica** $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$!

Esempio: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$

$$x < y \Rightarrow x^3 < y^3 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ è strett. crescente}$$

Pero'

$$\underline{f'(0) = 0}$$

Teorema (derivata prima ed estremi relativi)

sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. Supponiamo che f è continua in x_0 e derivabile in un intorno di x_0

tranne in x_0

① Se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

e

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

allora x_0 è un p. di **minimo relativo** di f .

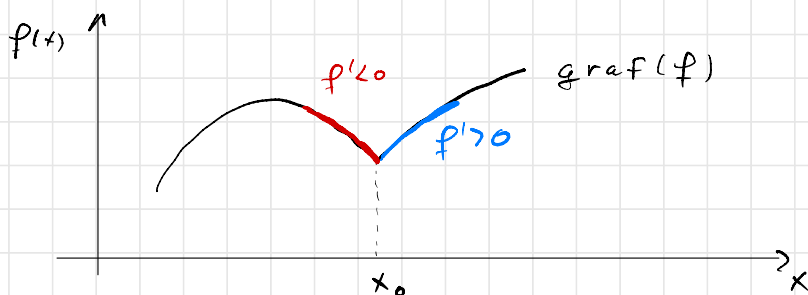
② se $\exists \delta > 0$ tale che

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

e

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

allora x_0 è un p. di **massimo relativo** di f .



f non è derivabile in x_0 , ma il Teo precedente è applicabile e dice che x_0 è un p. di minimo relativo.

Derivate di ordine superiore

Def.: sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. Se esiste il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$, allora

esso viene chiamato la derivata seconda di f in x_0

e viene indicato con $f''(x_0)$. Se inoltre $f''(x_0) \in \mathbb{R}$, allora diciamo che f è derivabile due volte in x_0 .

Notazioni alternative:

$$f''(x_0) = \frac{d^2}{dx^2} f(x_0) = D^2 f(x_0) = f^{(2)}(x_0)$$

Def: le derivate di ordine $n \in \mathbb{N}$ vengono definite per induzione. Cioè, diciamo che f è derivabile n -volte in x_0 , se è derivabile in x_0 $(n-1)$ volte e se $f^{(n-1)}$ è derivabile.

In tal caso poniamo

$$\underline{f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)}$$

Def: sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Poniamo

$$C^n(a,b) = \{ f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ tale che } f \text{ è derivabile } n\text{-volte in } (a,b) \text{ e } f^{(n)} \text{ è continua in } (a,b) \}$$

$n \in \mathbb{N}$

in particolare

$$C^0(a,b) = \{ f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ è continua in } (a,b) \}$$

Def.:

$$C^\infty(a, b) = \{f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : f \in C^n(a, b) \forall n \in \mathbb{N}\}$$

N.B.: le funzioni elementari sono di classe C^∞

nel loro dominio naturale

Sono di classe C^∞ anche le funzioni razionali

Fratte: $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_k(x)}$ $P_n \dots$ polinomio di grado n
 $Q_k \dots$ polinomio di grado k

$\Rightarrow f \in C^\infty(I)$, dove

$$I = \{x \in \mathbb{R}, Q_k(x) \neq 0\}$$

Esempi: 1, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x e^{x^2}$$

$$f''(x) = 2e^{x^2} + 2x \cdot 2x e^{x^2} = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}$$

$$f^{(3)}(x) = 2x e^{x^2} + 8x e^{x^2} + 8x^3 e^{x^2}$$

$\vdots$
etc.

2, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = (\cos x)' = -\sin x$$

$$f^{(3)}(x) = (-\sin x)' = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = (-\cos x)' = \sin x = f(x)$$

$$3, \quad f(x) = \cos x, \quad f'(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = -\cos x, \quad f^{(3)}(x) = \sin x$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$$

Teorema (criterio della derivata seconda): sia

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in A e sia $x_0 \in A$ un p. stazionario di f . Se f è derivabile due volte in x_0 , allora valgono le seguenti

affermazioni: ① $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è un punto di minimo relativo di f .

② $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è un p. di massimo relativo di f .

Dim.: dimostriamo ①. perché x_0 è un p. staz. di f

$$\begin{aligned} f''(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - \overbrace{f'(x_0)}^{=0}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0. \end{aligned}$$

Quindi per il Teorema della permanenza del segno esiste $\exists \delta > 0$ tale che

$$\forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}: \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 & \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \\ f'(x) < 0 & \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \end{cases}$$

$\Rightarrow x_0$ è un p. di minimo relativo per
il Teorema della derivate ed estremo relativo.

Teorema di de L'Hopital: sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e

siano f, g due funzioni derivabili in un
intorno di x_0 (tranne x_0 stesso), e tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \{0, +\infty, -\infty\}.$$

Se $\exists \delta > 0$ tale che $g'(x) \neq 0$ in $I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$

e se esiste il limite di

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ allora vale}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Applicazioni

$$1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log x = 0 \quad \forall x > 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} \quad \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] = (H)$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{1+\alpha}}{x} \\
 &= -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha} = \underline{\underline{0}}
 \end{aligned}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} \\
 &= \underline{\underline{0}}
 \end{aligned}$$

