
Nome, Cognome, Matricola:

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^\alpha} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arctan(x)} \right) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\sin(x^2) - \log(1+x^2)}{x^3} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Allora f è continua in $x = 0$ se

☐ A : $\alpha \leq 2$ ☐ B : $\alpha \leq 1$ ☐ C : $\alpha \leq 0$ ☒ D : $\alpha < 1$ ☐ E : $\alpha < 0$

Punteggio: 7

2. Il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n^{\frac{2}{n}} - 1)}{\log(1 + n^n)}$$

vale

☐ A : 1 ☐ B : -2 ☐ C : -1 ☐ D : 3 ☒ E : 2

Punteggio: 7

3. Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$|z| = 4 \quad \text{e} \quad z \cdot \frac{1 + \exp(i\frac{3}{2}\pi)}{\exp(|z|^3) + |z|^2 + 3} \in (0, +\infty)$$

Punteggio: 6

4. La serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right)^2$$

converge se e solo se

☐ A : $\alpha \leq 4$ ☐ B : $\alpha \leq 3$ ☒ C : $\alpha < 3$ ☐ D : $\alpha < 4$ ☐ E : $\alpha < 2$

Punteggio: 6

5. Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^{4x} + 1} dx$$

Punteggio: 6

Svolgimento

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{x^2} - \frac{x^6}{6} - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x^3}$$
$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\alpha} \frac{\arctan(x) - x}{x \arctan(x)}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\alpha} \frac{x - \frac{x^3}{3} - x + o(x^3)}{x^2}$$
$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-\alpha} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha < 1}$$

2.

$$n^{\frac{2}{n}} = e^{\frac{2}{n} \log n} = 1 + \frac{2}{n} \log n + o\left(\frac{1}{n} \log n\right)$$

$n \rightarrow \infty$

$$\log(1+n^n) \sim \log(n^n) = n \log n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 (n^{\frac{2}{n}} - 1)}{\log(1+n^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \log n}{n \log n} = \boxed{2}$$

3. $z = x + iy$, $x^2 + y^2 = 16$

$$(x + iy)(1 - i) > 0$$

$$x + y + i(y - x) > 0 \Rightarrow x = y \wedge x > 0$$

1 punto: $x = y = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$

4.
$$n^\alpha \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right)^2 \sim n^\alpha \left(1 - \frac{1}{2n^2} - 1 \right)^2$$

$$\sim \frac{1}{4} n^{\alpha-4}$$

$\Rightarrow$ la serie converge $\Leftrightarrow \alpha < 3$

5. $t = e^{2x}$ $dt = 2e^{2x} dx$

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1 + e^{4x}} dx = \frac{1}{2} \int_1^{e^2} \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left(\arctan(e^2) - \frac{\pi}{4} \right)$$