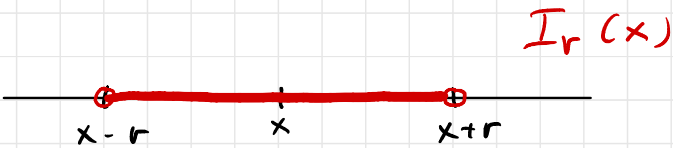
Elementi di topologia in $\mathbb{R}$

3.10.2023

Def.: ① sia $x \in \mathbb{R}$ e sia $r > 0$. Chiamiamo

$$I_r(x) = (x - r, x + r)$$

intorno di x di raggio r.



② Sia $a \in \mathbb{R}$. Chiamiamo

$$(a, +\infty)$$

intorno di $+\infty$ di estremo inferiore a.

③ sia $a \in \mathbb{R}$. Chiamiamo

$$(-\infty, a)$$

intorno di $-\infty$ di estremo superiore a.

Def.: sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Diciamo che

$x \in \mathbb{R}$ è

① un punto interno di A se

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \quad I_\varepsilon(x) \subseteq A$$

2) un punto di accumulazione di A se

$$\forall \varepsilon > 0: \quad I_\varepsilon(x) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

3) un punto isolato di A se

$$\exists \varepsilon > 0: \quad I_\varepsilon(x) \cap A = \{x\}$$

4) un punto aderente ad A se x e' un p. isolato oppure un p. di accumulazione

---

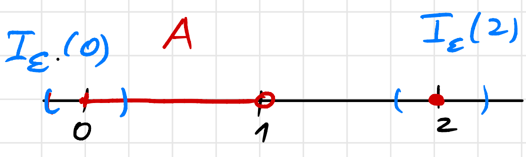
N.B.: 1) notazione: scriviamo p.a.c. di A appostso di p. di accumulazione.

2) La definizione non richiede che un p.a.c. di A sia un elemento di A.

3) Per definizione ogni punto interno di A è un p.a.c. di A.

Esempio

$$A = [0,1) \cup \{2\}$$



$\forall \varepsilon > 0:$

$I_\varepsilon(2) \not\subseteq A$

1) punti interni : $(0,1)$

2) $\underbrace{\text{p.a.c.}}_{=[0,1]}$: $\forall \varepsilon < \frac{1}{2}$: $I_\varepsilon(2) \cap A = \{2\}$

$\Rightarrow$ 2 è un p. isolato

Def.: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Chiamiamo

1. $\mathring{A} = \{x \in A : x \text{ è un p. interno di } A\}$

   parte interna di A

2. $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ è un p. aderente ad } A\}$

   chiusura di A.

3. $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ frontiera di A.

N.B.: $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$

Nell'esempio precedente si ha

$\mathring{A} = (0,1)$, $\overline{A} = [0,1] \cup \{2\}$

$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \{0, 1, 2\}$

Def.: un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si chiama

1. aperto se $A = \mathring{A}$

2. chiuso se $A = \overline{A}$