28.11.2023

Polinomi di Taylor

Confronto tra funzioni: sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e siano f, g funzioni tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) \in \{0, +\infty, -\infty\}$$

Supponiamo che esista il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

- se $L = 0$, diciamo che f è **trascurabile** risp. a g per $x \to x_0$ e scriviamo

$$f(x) = o(g(x)) \qquad x \to x_0$$

"o piccolo"

- se $L = \pm\infty$, diciamo che g è **trascurabile** risp. a f per $x \to x_0$ e scriviamo

$$g(x) = o(f(x)) \qquad x \to x_0$$

Esempio $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = x^2$

Allora $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \Rightarrow g(x) = o(f(x)) \quad x \to 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow f(x) = o(g(x)) \quad x \to +\infty$

Confronto tra alcune funzioni elementari

1. $x^m = o(x^n) \quad x \to 0 \quad$ se $m > n$

2. $x^m = o(x^n) \quad x \to \pm\infty \quad$ se $m < n$

3. $\log x = o(x^{-\alpha}) \quad x \to 0^+ \quad \forall\, \alpha > 0$

4. $\log x = o(x^{\alpha}) \quad x \to +\infty \quad \forall\, \alpha > 0$

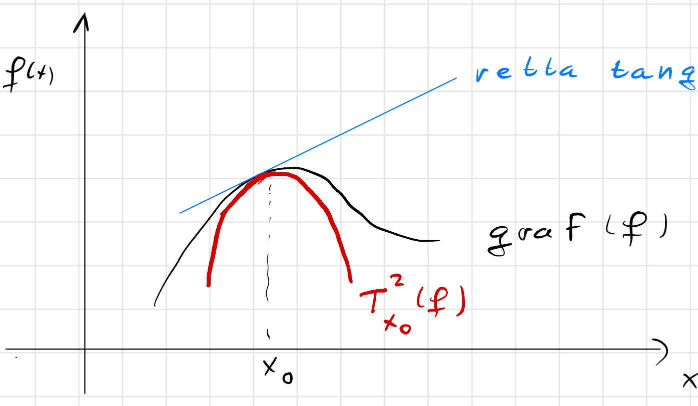
5. $x^m = o(e^x) \quad x \to +\infty \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$

6. $e^x = o(|x|^{-\alpha}) \quad x \to -\infty \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

Polinomi di Taylor: sia $f : A \to \mathbb{R}$ n-volte derivabile in $x_0 \in \mathring{A}$.

Obiettivo: approssimare f nei intorni di x_0 con un polinomio di grado n.

Per $n=1$:



$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Osservo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{= f'(x_0)} - f'(x_0) \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0}}_{= 1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = o(x - x_0) \quad x \to x_0$$

Più in generale vorrei trovare un polinomio P_n di grado n in modo tale che

$$f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n) \qquad x \to x_0$$

Def.: sia $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile n-volte in $x_0 \in \mathring{A}$.

Chiamiamo

$$T^n_{x_0}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

il polinomio di Taylor di f di centro x_0.

Quindi

$$T^2_{x_0}(f)(x) = \underset{(k=0)}{f(x_0)} + \underset{(k=1)}{f'(x_0)(x - x_0)} + \underset{(k=2)}{\frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}$$

Notazione: per $x_0 = 0$ scriviamo $T^n(f)(x)$

Esempio: $f(x) = \sin x$; $x_0 = 0$; $n=3$

$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$; $f'''(x) = -\cos x$

$f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$

Quindi

$$T^3(\sin x) = \underbrace{0}_{k=0} + \underbrace{x}_{k=1} + \underbrace{0}_{k=2} - \underbrace{\frac{1}{6}x^3}_{k=3}$$

$$= \underline{x - \frac{x^3}{6}}$$

Teorema (sviluppo di Taylor con resto di Peano):

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ n-volte derivabile in $x_0 \in \mathring{A}$, e sia $T^n_{x_0}(f)$ il suo polinomio di Taylor di grado n e centro x_0. Allora

$$\boxed{f(x) - T^n_{x_0}(f)(x) = o((x-x_0)^n) \qquad x \to x_0}$$

Esempio $f(x) = \sin x$; $x_0 = 0$

Taylor: $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad x \to 0$

Quindi $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \overset{\text{Taylor}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3)}{x^3}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{6}}{x^3} + \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{o(x^3)}{x^3}}_{= 0} = \frac{1}{6}$$

Polinomi di Taylor notevoli: $x_0 = 0$

1) $$T^n(e^x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

2) $$T^n(\log(1+x)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$$

3) $$T^{2n}(\cos x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

4) $$T^{2n+1}(\sin x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

5) $$T^n((1+x)^\alpha) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$

dove $$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

---

ad esempio per $\alpha = \frac{1}{2}$, $n = 2$ si ha

$$T^2(\sqrt{1+x}) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

Esempi: 1) sia $f(x) = e^{x^2}$. Calcolare il suo polinomio di grado 6 e di centro $x_0 = 0$.

Si ha

$$T^3(e^t) \overset{1)}{=} 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}$$

ponendo $t = x^2$ si ha

$$T^6(e^{x^2}) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$$

2) Calcolare il polinomio di Taylor di grado 6 di centro $x_0 = 0$ della funzione

$$\log(2 + x^2)$$

scrivo

$$\log(2 + x^2) = \log\left(2\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)\right) =$$

$$= \log 2 + \log\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)$$

$$2) \Rightarrow T^3(\log(1+t)) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$$

ponendo $t = \frac{x^2}{2}$ ottengo

$$T^6\left(\log\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{24}$$

Quindi

$$T^6(\log(2 + x^2)) = \log 2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{24}$$

Esempio: Calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - (\sin x)^2}{x^4}$$

Numeratore: $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \quad t \to 0$

$\Downarrow$

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6) \quad \underline{x \to 0}$$

$$\Rightarrow \quad (\sin x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + 2x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) o(x^3) + (o(x^3))^2$$

In generale:

$m, n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\begin{aligned} x^m o(x^n) &= o(x^{n+m}) \\ (o(x^n))^\alpha &= o(x^{\alpha n}) \end{aligned}} \qquad \alpha > 0$$

Quindi $\quad x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) o(x^3) = o(x^4)$

$$(o(x^3))^2 = o(x^6)$$

$\Rightarrow$ Numeratore: $\sin(x^2) - (\sin x)^2 =$

$$= x^2 - \frac{x^6}{6} - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + o(x^4)$$

$$= \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

Quindi $\quad L = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$