



Successioni numeriche

Def.: una successione numerica è una funzione f definita in $\text{dom}(f) \subseteq \mathbb{N}$ che ad ogni $n \in \text{dom}(f)$ associa un numero reale

$$\underline{a_n = f(n)}$$

Notazione: - se $\text{dom}(f) = \mathbb{N}$, allora scriviamo

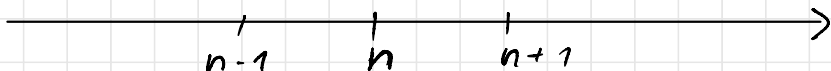
$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

- se $\text{dom} f = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, allora scriviamo

$$\{a_n\}_{n \geq n_0}$$

Es.: $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n \geq 1}$, $\{\frac{1}{\log(n)}\}_{n \geq 2}$

N.B.: ogni $n \in \mathbb{N}$ è un punto isolato di $\mathbb{N}$:



$$\forall \varepsilon < 1 \quad \text{si ha} \quad I_\varepsilon(n) \cap \mathbb{N} = \{n\}$$

D'altra parte per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > M$.

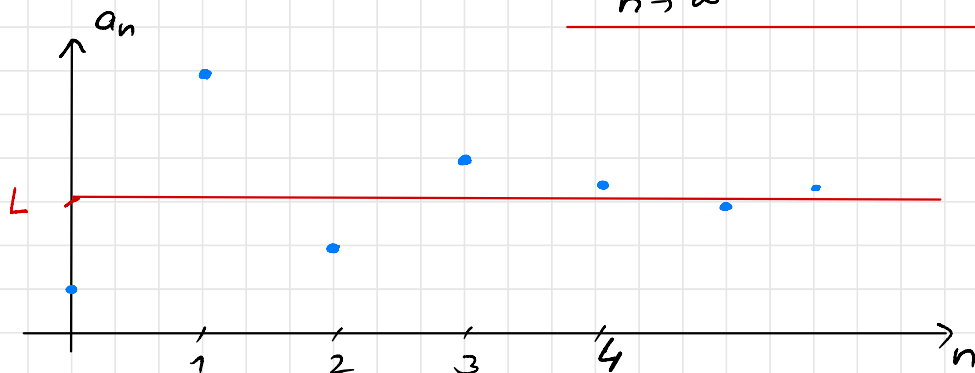
Quindi ogni intorno di $+\infty$ contiene infinito elementi di $\mathbb{N}$. $\Rightarrow +\infty$ è l'unico punto di accumulazione di $\mathbb{N}$.

Def.: sia $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ una successione numerica. Diciamo che $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ converge se $\exists L \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : n > N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

In tal caso scriviamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$



Def.: sia $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ una successione numerica. Diciamo che la successione

- diverge positivamente se

$$\forall R \in \mathbb{R} \exists N_R : n \geq N_R \Rightarrow a_n > R.$$

Scriviamo
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

- diverge negativamente e scriviamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty, \text{ se}$$

$$\forall R \in \mathbb{R} \exists N_R : n \geq N_R \Rightarrow a_n < R$$

- oscilla se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \nexists$$

→ tutti gli altri casi

Esempio: 1, $a_n = n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

2, $a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{per } n \text{ pari} \\ -1 & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$

$\Rightarrow a_n$ oscilla

$$3, \quad a_n = \frac{n-1}{n} ; \quad n \geq 1$$

verifichiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

Sia $\varepsilon > 0$. Pongo $N_\varepsilon = \min \{n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{\varepsilon}\}$

Quindi

$$\begin{aligned} \forall n \geq N_\varepsilon \text{ si ha } |a_n - 1| &= \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| \\ &= \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon \end{aligned}$$

Successione geometrica:

$$a_n = q^n ; \quad q \in \mathbb{R}$$

- se $-1 < q < 1$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

- se $q = 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1$$

- se $q > 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$$

- se $q \leq -1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n \nexists$$

N.B.: se $q < -1$, allora

$$q^n = (-|q|)^n = \underbrace{(-1)^n}_{\text{oscilla}} |q|^n \rightarrow +\infty$$

31.10.2023

Algebra di limiti

siano $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ e $\{b_n\}_{n \geq n_1}$ due successioni numeriche tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora le seguenti formule:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = L + M$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = L \cdot M$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M} \quad (M \neq 0)$$

valgono in assenza delle forme indeterminate:

$$0 \cdot (\pm \infty), \quad \infty - \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Caso $M=0$: suppongo che $L \neq 0$, $L \in \mathbb{R}$

vi sono 3 possibilità:

1, se $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > N_0$: $b_n > 0$,

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } L > 0 \\ -\infty & \text{se } L < 0 \end{cases}$$

2, se $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > N_0$: $b_n < 0$,

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} -\infty & \text{se } L > 0 \\ +\infty & \text{se } L < 0 \end{cases}$$

3, se $\forall N_0 \in \mathbb{N} \exists n, m > N_0$ tali che $b_n \cdot b_m < 0$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \nexists$$

Esempio:

$$a_n = \arctan(n)$$

$$b_n = \frac{1}{n} \cos(n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n} \right)}_{\substack{\text{limitata} \\ 0}} \cos(n) = 0$$

Osservo che $\forall N_0 \exists n, m > N_0$ tali che
 $\cos(n) \cdot \cos(m) < 0$

$$\Rightarrow \exists, \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \nexists$$

Teorema (permanenza del segno): sia $\{a_n\}_{n \geq n_0}$

una successione numerica tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \neq 0$$

Allora $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tale $\forall n > N_0$: a_n ha lo stesso segno di L .

Teorema del confronto: siano $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ e

$\{b_n\}_{n \geq n_0}$ due successioni tali che

$$\underline{a_n \leq b_n} \quad \forall n \geq n_0$$

Se esistono i limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M,$$

allora $\underline{L \leq M}$.

Teorema dei due carabinieri: siano $\{a_n\}_{n \geq n_0}$,

$\{b_n\}_{n \geq n_0}$ e $\{c_n\}_{n \geq n_0}$ tre successioni

tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$ $\forall n \geq n_0$.

Se esistono i limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L \in \overline{\mathbb{R}}, \text{ allora}$$

$$\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L}$$

Successioni monotone

Def.: diciamo che una successione numerica

$\{a_n\}_{n \geq n_0}$ è

- crescente se $\forall n \geq n_0 : \underline{a_n \leq a_{n+1}}$

- decrecente se $\forall n \geq n_0 : \underline{a_n \geq a_{n+1}}$

Teorema: sia $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ una successione monotona (cioè crescente o decrecente).

Allora il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ esiste e vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\sup_{n \geq n_0} a_n} \in \overline{\mathbb{R}} \text{ se } a_n \text{ è } \underline{\text{crescente}}$$

e

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \geq n_0} a_n \in \bar{\mathbb{R}}$ se a_n è
decreciente

Corollario: ogni successione monotona e
limitata è convergente.

N.B.: $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ si dice limitata se
 $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che
 $\forall n \geq n_0: |a_n| \leq M$

Consideriamo le successioni

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{e} \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad n \geq 1$$

Dunque $a_n > 1$ e $b_n > 1 \quad \forall n \geq 1$

$$\text{e} \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n > a_n \quad \forall n \geq 1$$

Lemma: $\{a_n\}_{n \geq 1}$ è una successione
crescente.

Dim.: devo dimostrare che $\forall n \geq 1$ vale

$$a_n \leq a_{n+1}$$

Cioè

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$\Downarrow$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \frac{n}{n+1} \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$\Downarrow$

$$\frac{n}{n+1} \leq \underbrace{\left[\left(\frac{n}{n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\right]^{n+1}}_{\parallel c_n}$$

Quindi devo verificare che

$$\forall n > 1: \quad c_n > \frac{n}{n+1}$$

Osservo che

$$\begin{aligned} c_n &= \left(\frac{n}{n+1} + \frac{n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \left(\frac{n(n+1) + n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}} \end{aligned}$$

Ricordo: disuguaglianza di Bernoulli:

$$\forall x > -1, \forall n: \quad (1+x)^{(n+1)} > 1 + (n+1)x \quad (B)$$

$$\text{applico (B) con } x = -\frac{1}{(n+1)^2} > -1 \Rightarrow$$

$$c_n > 1 - \frac{n+1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

OK

Nello stesso si dimostra che b_n è
decrecente. Inoltre

$$\forall n: \quad \underline{1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$\hookrightarrow a_n$ è limitata

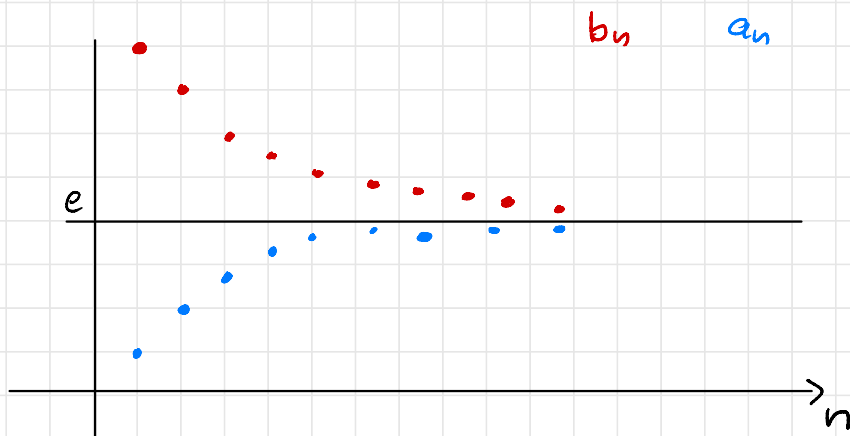
$\forall n: \quad \hookrightarrow b_n$ è limitata

Dunque a_n e b_n sono convergenti.

Siccome

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n \quad \text{si ha}$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e}$$



Gerarchia di infiniti

Def.: sia $n \in \mathbb{N}$. Chiamiamo

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots \dots 1$$

n Fattoriale.

per def. si ha $0! = 1$

Quindi $n! = n(n-1)!$

$$\textcircled{1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^\beta}{n^\alpha} = 0 \quad \begin{array}{l} \forall \beta \in \mathbb{R} \\ \forall \alpha > 0 \end{array}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \quad \begin{array}{l} \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ \forall a > 1 \end{array}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Caso particolare:

$$a_n = \alpha_k n^k + \alpha_{k-1} n^{k-1} + \dots + \alpha_0, \quad \alpha_k \neq 0$$

$\hookrightarrow$ polinomio di grado $k \in \mathbb{N}$

$$b_n = \beta_j n^j + \beta_{j-1} n^{j-1} + \dots + \beta_0, \quad \beta_j \neq 0$$

↳ polinomio di grado $j \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \frac{\alpha_k}{\beta_j} & \text{se } k = j \\ +\infty & \text{se } k > j \text{ e } \alpha_k \cdot \beta_j > 0 \\ -\infty & \text{se } k > j \text{ e } \alpha_k \cdot \beta_j < 0 \\ 0 & \text{se } k < j \end{cases}$$

6.11.2023

Successioni limitate

Def.: una successione $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ si dice limitata se $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall n \geq n_0 : |a_n| \leq M$$

Equivalentemente, se

$$\sup_{n \geq n_0} |a_n| < +\infty$$

Teorema: ogni successione convergente è limitata.

Dim.: sia $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ una successione convergente.

Quindi esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Pongo $\varepsilon = 1$ nella definizione del limite. Quindi:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n > N_1 : |a_n - L| < 1$$

$$\Rightarrow \forall n > N_1 : |a_n| = |a_n - L + L| \stackrel{\text{disug. triangolare}}{\leq} |a_n - L| + |L| < 1 + |L|$$

$$\Rightarrow \sup_{n > N_1} |a_n| \leq 1 + |L|$$

D'altra parte

$$\max_{n_0 \leq n < N_1} |a_n| < \infty$$

Quindi

$$\forall n > n_0, \quad |a_n| \leq \max \{ |L| + 1, \max_{n_0 \leq n < N_1} |a_n| \}$$

N.B.: non vale il vice-versa! Cioè, non tutte le successioni limitate sono convergenti.

Es.: $a_n = \cos(n) \quad ; \quad n > 0$

$$\Rightarrow |a_n| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ è limitata, ma non converge

Sottosuccessioni

Def.: sia $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ una successione. Diciamo che $\{b_n\}_{n \geq n_1}$ è una **sottosuccessione** di $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ se esiste una funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che

① f è strettamente crescente, cioè

$$\forall n: f(n) < f(n+1)$$

② $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = +\infty$

③ $\forall n \geq n_1: \quad \underline{b_n = a_{f(n)}}$

Esempio: 1, $a_n = (-1)^n$

$b_n = (-1)^{2n} = 1 \quad \forall n$ è una sottosuccessione
con $f(n) = 2n$

$c_n = (-1)^{2n+1} = -1$ è una sottosuccessione
di $\{a_n\}$ con $f(n) = 2n+1$

2, la successione $\left\{ \frac{1}{(2n+1)^2} \right\}_{n \geq 0}$

- è una sottosuccessione di $\left\{ \frac{1}{n^2} \right\}_{n \geq 1}$

con $f(n) = 2n+1$

- è anche una sottosuccessione di $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \geq 1}$

con $f(n) = (2n+1)^2$

Teorema di Bolzano-Weierstrass: ogni
successione limitata ammette una
sottosuccessione convergente.

Esempio: $a_n = \arctan [(-1)^n (n^2 + 3n)]$

$\forall n \geq 0: |a_n| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \{a_n\}_{n \geq 0}$ è limitata.

$$1, f(n) = 2n \Rightarrow b_n = a_{f(n)} = \arctan(4n^2 + 6n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\pi}{2}$$

$$2, f(n) = 2n+1 \Rightarrow c_n = a_{2n+1} = \arctan[-(2n+1)^2 - 6n - 3]$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\frac{\pi}{2}$$

N.B.: non tutte le successioni ammettono una sottosuccessione limitata. Per esempio

$$a_n = n(-1)^n$$

Oss.: a_n NON è limitata.

Teorema: sia $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ una successione convergente e sia $L \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Sia inoltre $\{b_n\}_{n \geq n_1}$ una sottosuccessione di $\{a_n\}_{n \geq n_0}$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$$

Dim.: sia $\varepsilon > 0$. Siccome $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, esiste $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che:

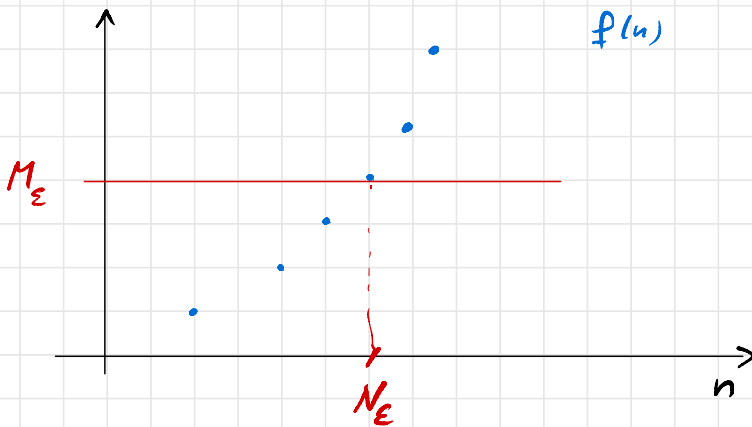
$$\forall n \geq M_\varepsilon: |a_n - L| < \varepsilon.$$

Sia $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la funzione tale che

$$b_n = a_{f(n)} \text{ e tale che}$$

$$f(n) < f(n+1) \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = +\infty.$$

Quindi $\exists N_\varepsilon$ tale che $\forall n > N_\varepsilon : f(n) > M_\varepsilon$



Dunque $\forall n > N_\varepsilon : |b_n - L| = |a_{f(n)} - L| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$$

Corollario: se una successione $\{a_n\}_{n \geq n_0}$

ammette due sottosuccessioni $\{b_n\}_{n \geq n_1}$ e

$\{c_n\}_{n \geq n_2}$ convergenti e tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} c_n, \quad \text{allora}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \nexists$$

Es.: la successione $(-1)^n$ ammette due sottosuccessioni $\{b_n\}_{n \geq 0}$ e $\{c_n\}_{n \geq 0}$

tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -1,$$

quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \nexists$$

Alcuni limiti notevoli

$$\textcircled{1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \log\left(1 + \frac{a}{n}\right) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(e^{\frac{a}{n}} - 1\right) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a - 1\right) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a > 0$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\textcircled{6} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

$$\textcircled{7} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

N.B.: se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, allora

diciamo che le successioni a_n e b_n sono **asintoticamente equivalenti** e

scriviamo $a_n \sim b_n \quad n \rightarrow \infty$

se $a_n \sim b_n \quad n \rightarrow \infty$

e $\alpha_n \sim \beta_n \quad n \rightarrow \infty$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \beta_n$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\beta_n}$$

NON vale per la somma! Cioè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + \alpha_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + \beta_n)$$

Esempio: 1) $L = \lim_{n \rightarrow \infty} (\log(n+2) - \log n) n^2 (\sqrt{n^2+3} - n)$

$$\log(n+2) - \log n = \log\left(\frac{n+2}{n}\right) = \log\left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow 1) \quad \log\left(1 + \frac{2}{n}\right) \sim \frac{2}{n} \quad n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} n^2 (\sqrt{n^2+3} - n) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt{n^2+3} - n)$$

$$\sqrt{n^2+3} - n = \frac{(\sqrt{n^2+3} - n)(\sqrt{n^2+3} + n)}{\sqrt{n^2+3} + n}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{n^2+3} + n} \sim \frac{3}{2n} \quad n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow L = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{3}{2n} = 3$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (e^{\frac{1}{n^2}} - 1)$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \sim \frac{1}{n^2} \quad n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (e^{\frac{1}{n^2}} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{1}{n^2} = 1$$

$$3) \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^n (n^4 + n^2 + 1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e \sqrt[n]{n^4 + n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} e \sqrt[n]{n^4 (1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4})}$$

$$= e \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}}_{\rightarrow 1}$$

$$= e \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right)^4$$

$$\textcircled{5} \xrightarrow{=} e$$

Esercizi assegnati

$$1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - 5n^3}{n^3 + n(n+1)(n+2)}$$

$$2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$$

$$3, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [\log(n^2 + 1) - 2\log(n)] (2n^2 + 3n)$$

$$4, \quad \text{losto:} \\ (\text{molto}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{n} - 1}$$