



Serie numeriche

Def.: sia $\{a_n\}_{n \geq 0}$ una successione numerica.

Chiamiamo

$$S_k = a_0 + a_1 + \dots + a_k = \sum_{n=0}^k a_n$$

la successione delle **somme parziali** associata a $\{a_n\}_{n \geq 0}$.

Poniamo formalmente

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$$

e chiamiamo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **serie numerica** con

termine generale a_n .

Def (carattere della serie numerica): diciamo

che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

- **converge**, se $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S \in \mathbb{R}$

In tal caso chiamiamo S la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

- diverge positivamente, se $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = +\infty$

- diverge negativamente, se $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = -\infty$

- oscilla, se $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k \nexists$.

Esempio: 1, $a_n = n$

$$\text{Si ha } S_k = \sum_{n=0}^k n = \frac{k(k+1)}{2} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} +\infty$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n$ diverge positivamente.

2, $a_n = (-1)^n$

$$\Rightarrow S_k = \sum_{n=0}^k (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 \dots + (-1)^k$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{per } k \text{ pari} \\ 0 & \text{per } k \text{ dispari} \end{cases}$$

Quindi $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k \nexists \Rightarrow$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{ oscilla.}$$

3, la serie geometrica: $a_n = q^n$, $q \in \mathbb{R}$

$$\text{per } q \neq 1: \sum_{h=0}^k q^h = \frac{1-q^{k+1}}{1-q} = S_k$$

$$\Rightarrow \text{per } \underline{q \in (-1, 1)}: \lim_{k \rightarrow \infty} q^{k+1} = 0$$

e quindi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \frac{1}{1-q} \Rightarrow \text{la serie converge}$$

$$\Rightarrow \text{per } q > 1 \text{ si ha } \lim_{k \rightarrow \infty} q^{k+1} = +\infty \Rightarrow$$

la serie diverge positivamente.

$$\Rightarrow \text{per } q = 1: S_k = k+1 \rightarrow +\infty_{k \rightarrow \infty}$$

$\Rightarrow$ la serie diverge pos.

$\rightarrow$ per $q \leq -1$ la serie oscilla

$$\text{perché } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1-q^{k+1}}{1-q} \nexists.$$

Lemma (condizione necessaria per la convergenza):

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie numerica convergente.

Allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Dim: la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \exists S \in \mathbb{R}$

taie che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S$$

Si ha

$$a_k = S_k - S_{k-1} = \sum_{n=0}^k a_n - \sum_{n=0}^{k-1} a_n$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} S_k}_S - \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} S_{k-1}}_S = 0.$$

N.B.: la condizione $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ e' solo

necessaria ma non sufficiente per la

convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$!

Esempio

$$a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) ; n \geq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \text{ ma}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \text{ (diverge positivamente).}$$

In Fatti, per ogni $k \geq 2$ si ha

$$\begin{aligned} S_k &= a_1 + a_2 + \dots + a_k = \sum_{n=1}^k \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^k \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^k [\log(n+1) - \log(n)] \\ &= \underbrace{\log(2) - \log(1)}_{n=1} + \underbrace{\log(3) - \log(2)}_{n=2} + \underbrace{\log(4) - \log(3)}_{n=3} \\ &\quad + \dots + \underbrace{\log(k+1) - \log(k)}_{n=k} = \log(k+1). \end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = +\infty.$$

N.B.: in generale vale

$$j < k: \sum_{n=j}^k (a_{n+1} - a_n) = \underline{a_{k+1} - a_j}$$

Serie numeriche a termini positivi

- le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ con $a_n > 0$

Teorema: sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie numerica

a termini positivi e sia S_k la successione delle sue somme parziali. Allora esiste il limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k > 0$$

Dim.: per ogni $k \geq 1$ si ha

$$S_{k+1} = \sum_{n=0}^{k+1} a_n = \underbrace{\sum_{n=0}^k a_n}_{S_k} + \underbrace{a_{k+1}}_{>0} = S_k + a_{k+1} > S_k$$

Quindi la successione S_k è crescente e dunque esiste il limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \sup_{k \geq 1} S_k$$

Criteri di convergenza

Teorema (criterio del confronto): siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie numeriche a termini positivi. Supponiamo che

$$\forall n \geq 0: \quad \underline{a_n \leq b_n}$$

Allora valgono le seguenti affermazioni:

$$\textcircled{1} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ diverge}$$

N.B.: le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=m}^{\infty} a_n$$

hanno lo stesso carattere per ogni $m \in \mathbb{N}$.

Quindi il criterio del confronto si può usare anche quando esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \geq m : a_n \leq b_n$$

Teorema (criterio del confronto asintotico) :

siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie numeriche a termini positivi. Supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad L \neq 0$$

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ converge}$$

Esempio: la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{diverge}$$

Infatti,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge. Quindi

per il criterio del confronto asintotico

diverge anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- se $\alpha \leq 0$, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \neq 0$ $\begin{cases} 1 & \alpha = 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ la serie diverge

- se $0 < \alpha \leq 1$, allora si ha

$$\frac{1}{n^{\alpha}} > \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ diverge per il criterio del confronto

- se $\alpha > 1$, allora serie converge

Esercizio: dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{converge}$$

e calcolare la sua somma.

Suggerimento: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

13.11.2023

↳ successione delle somme parziali:

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \\ &= \underline{1 - \frac{1}{k+1}} \end{aligned}$$

Quindi

$$\underline{S = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = 1}$$

N.B.: $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2} \quad n \rightarrow \infty$

Per il criterio del confronto asintotico

converge anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Dunque il criterio del confronto implica

che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge
per ogni $\alpha \geq 2$.

Teorema (criterio del rapporto): sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

una serie numerica a termini positivi. Se esiste il limite

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

- converge se $q < 1$.

- diverge se $q > 1$.

N.B.: se $q = 1$, il criterio è inefficace.

Teorema (criterio della radice): sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una

serie numerica a termini positivi. Supponiamo

che esista il limite

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Allora la serie converge se $q < 1$, e diverge se $q > 1$.

Per $q = 1$ il criterio è inefficace.

Esempi: 1, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, $a_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \underbrace{\frac{(n+1)!}{n!}}_{n+1} \frac{n^n}{(n+1)^n} \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n+1}{n+1} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \end{aligned}$$

Quindi $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$

perché $e = 2,71 \dots$

Per il criterio del rapporto la serie converge.

$$2, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{1}{2}\right)^n; \quad a_n = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \underline{\underline{\frac{e}{2} > 1}}$$

$\Rightarrow$ per il criterio della radice la serie diverge.

N.B.: se $a_n \sim n^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, per $n \rightarrow \infty$, allora il criterio del rapporto e della radice sono inefficaci. Infatti, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

In questi casi conviene usare il criterio del confronto asintotico con la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} = \begin{cases} \text{converge } \forall \beta \in \mathbb{R} \text{ se } \alpha > 1 \\ \text{converge } \forall \beta > 1 \text{ se } \alpha = 1 \\ \text{diverge altrimenti} \end{cases}$$

Esempio: sia $a_n = \frac{1}{(1 + \log(n^2))^2} [\log(1 + n^\alpha) - \alpha \log n]$

$\alpha \in \mathbb{R}$
 $\alpha \geq 0$

Determinare tutti e soli valori di $\alpha > 0$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

$$1 + \log(n^2) = 1 + 2 \log n \sim 2 \log n, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} \log(1+n^\alpha) - \alpha \log n &= \log(1+n^\alpha) - \log(n^\alpha) \\ &= \log\left(\frac{1+n^\alpha}{n^\alpha}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \end{aligned}$$

Quindi

$$a_n \sim \frac{1}{4} \frac{1}{(\log n)^2} \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

$$\text{- se } \alpha = 0: \quad \text{allora} \quad a_n \sim \frac{\log 2}{4} \frac{1}{(\log n)^2}$$

$\Rightarrow$ la serie diverge.

$$\text{- se } \underline{\alpha > 0}, \quad \text{allora} \quad \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \sim \frac{1}{n^\alpha} \quad n \rightarrow \infty$$

$$\text{perché} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) = 1$$

quindi

$$a_n \sim \frac{1}{4} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^2}$$

$\Rightarrow$ la serie converge se e solo se $\alpha > 1$.

Serie numeriche a termini con segno variabile

Def.: diciamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

- converge assolutamente, se converge la

serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

- converge semplicemente, se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge,

ma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

N.B.: dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

Caso particolare: $a_n = (-1)^n b_n$, dove

$$b_n > 0$$

Due alternative:

$$1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

$$2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ diverge}$$

$\Rightarrow$ proviamo ad applicare il seguente criterio:

Teorema (criterio di Leibniz) : sia $a_n = (-1)^n b_n$.

Supponiamo che ① $b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n$

② $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Esempio : $a_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

- se $\alpha \leq 0$, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \not\equiv 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$
non converge

- se $0 < \alpha \leq 1$, allora

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge , ma

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge per il criterio di

Leibniz. In fatti, abbiamo $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

Quindi $b_{n+1} < b_n \quad \forall n \geq 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad (\alpha > 0)$

- se $\alpha > 1$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

assolutamente perché la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \text{converge} \quad \forall \alpha > 1.$$

N.B.: il criterio di Leibniz si applica anche sotto la condizione più debole:

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq N_0: b_{n+1} \leq b_n \quad \text{1-bis}$$

3.4.2023:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{\alpha^2 - 3}{2} \right)^n \frac{1}{n \log(n^5 + \arctan(n))}}_{a_n}$$

$$\underline{\alpha > 0}$$

$$\log(n^5 + \arctan(n)) \sim \log(n^5) = 5 \log n$$

$$\begin{aligned} \text{se } \frac{\alpha^2 - 3}{2} > 1 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha^2 - 3}{2} \right)^n \frac{1}{5n \log n} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ la serie diverge $\forall \alpha > \sqrt{5}$

$$\text{se } \frac{\alpha^2 - 3}{2} < -1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \nexists$$

$\Rightarrow$ la serie oscilla per

$$\underline{0 < \alpha < 1}$$

- se $-1 < \frac{\alpha^2 - 3}{2} < 1$; allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{\alpha^2 - 3}{2} \right|^n}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{5n \log n}}$$

$$1 < \alpha < \sqrt{5}$$

$= \left| \frac{\alpha^2 - 3}{2} \right| < 1 \Rightarrow$ la serie converge assolutamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\log n} = 1$$

- se $\frac{\alpha^2 - 3}{2} = 1$; si ha $a_n \sim \frac{1}{5n \log n}$

$\downarrow$
 $\alpha = \sqrt{5} \Rightarrow$ la serie diverge

- se $\frac{\alpha^2 - 3}{2} = -1$, allora

$$\alpha = 1$$

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{\underbrace{n \log(n^5 + \arctan(n))}_{b_n}}$$

Siccome $b_{n+1} < b_n \quad \forall \quad n \geq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

la serie converge per il criterio di Leibniz.

Conclusione: la serie converge se e solo se

$$1 \leq x < \sqrt{5}$$