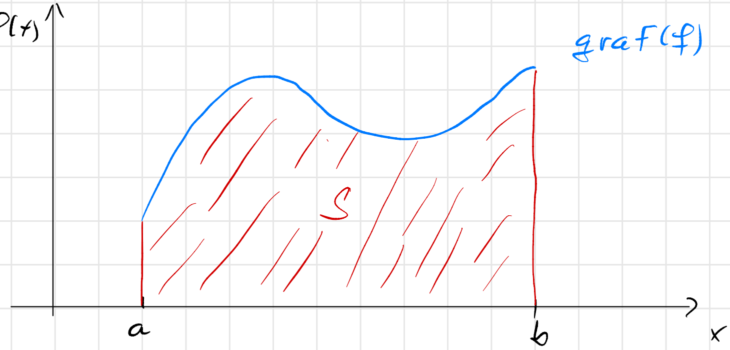
4.12.2023

Integrale di Riemann

Motivazione sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione positiva:



Come calcolare l'area di S?

N.B.: se $f(x) = c \quad \forall\, x \in [a,b]$, allora

$$\text{area}(S) = c\,(b-a)$$

Def.: chiamiamo una suddivisione dell'intervallo $[a,b]$ l'insieme finito

$$D = \{x_j : a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b\}$$

N.B.:
$$[a,b] = \bigcup_{j=1}^{n} [x_{j-1}, x_j]$$

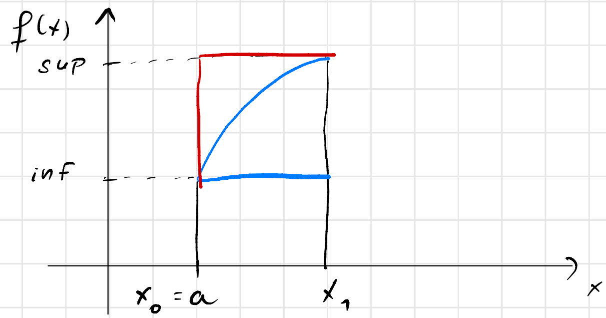
Def.: sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e sia $D = \{x_j,\ j = 0, \dots, n\}$ una suddivisione dell'intervallo $[a,b]$. Allora chiamiamo

$$S(f,D) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x)$$

somma superiore di f risp. alla suddivisione D.

$$s(f,D) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \inf_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x)$$

somma inferiore di f risp. alla suddivisione D.



N.B.: 1) per ogni suddivisione D si ha

$$s(f,D) \le \text{area}(S) \le S(f,D)$$

2) per ogni due suddivisioni D_1 e D_2 vale

$$s(f,D_1) \le S(f,D_2)$$

Def.: siano D_1 e D_2 due suddivisioni di $[a,b]$.

Diciamo che D_2 è più fine di D_1 se

$$D_1 \subset D_2$$

Consideriamo una successione di suddivisioni

D_n dell'intervallo $[a,b]$ tali che

$$D_n \subset D_{n+1} \qquad \forall n$$

Allora $\forall n$ si ha

$$s(f, D_n) \leq s(f, D_{n+1}) \leq \text{area}(S) \leq S(f, D_{n+1}) \leq S(f, D_n)$$

Def.: sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata.

Chiamiamo

$$J(f) = \inf_{D \in \mathcal{D}} S(f, D)$$

integrale superioriore di f in $[a,b]$, dove $\mathcal{D}$ è la famiglia di tutte le suddivisioni di $[a,b]$.

Chiamiamo

$$I(f) = \sup_{D \in \mathcal{D}} s(f, D)$$

integrale inferiore di f in $[a,b]$

N.B: per ogni funzione limitata f vale

$$I(f) \leq J(f)$$

Def.: sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata.

Se $I(f) = J(f)$, diciamo che f è integrabile (secondo Riemann) e in tal caso poniamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = I(f) = J(f)$$

integrale di Riemann della funzione f sull'intervallo $[a,b]$.

N.B.: non tutte le funzioni limitate sono integrabili secondo Riemann: consideriamo la funzione di Dirichlet data da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

---

f è limitata, ma non è integrabile su $[0,1]$.

Infatti, per ogni suddivisione

$$D = \{x_j : 0 = x_0 < x_1 \dots < x_n = 1\}$$

vale

$$s(f,D) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \overbrace{\inf_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x)}^{= 0 \ \forall j} = 0$$

$$\Rightarrow \quad I(f) = \sup_{D \in \mathcal{D}} s(f,D) = 0$$

Invece

$$S(f,D) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \underbrace{\sup_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x)}_{= 1 \ \forall j} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{I}(f) = \inf_{D \in \mathcal{D}} S(f, D) = 1$$

Funzioni integrabili 2° Riemann

Def.: diciamo che $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua a tratti se esiste una suddivisione $D = \{x_j,\ j = 0, \dots, n\}$ dell'intervallo $[a, b]$ tale che

1. $\forall j = 0, \dots, n$ f è continua in (x_{j-1}, x_j)
2. $\forall j = 0, \dots, n$ esistono finiti i limiti

$$\lim_{x \to x_j^-} f(x) \quad e \quad \lim_{x \to x_j^+} f(x)$$

N.B.: ogni funzione continua è continua a tratti.

Teorema: sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Le seguenti funzioni sono integrabili 2° Riemann:

1. funzioni continue a tratti in $[a, b]$
2. funzioni monotone in $[a, b]$.

In particolare, ogni funzione continua è integrabile 2° Riemann.

Proprietà dell'integrale di Riemann

siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili.

Valgono le seguenti affermazioni:

1. Linearità: $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vale
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

2. Additività $\forall\ c \in (a, b)$ vale
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

3. Confronto: se $\forall\ x \in [a,b]: f(x) \leq g(x)$, allora
$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$$

4. Confronto con il modulo: se $|f|$ è integrabile, allora
$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Teorema della media integrale: sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $\exists\ c \in [a,b]$ tale che
$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b-a}$$

Dim.: per il Teorema di Weierstrass la funzione f è limitata in $[a,b]$: quindi esisto $m, M \in \mathbb{R}$ tali che

$$\forall x \in [a,b]: \quad m \leq f(x) \leq M$$

Quindi per la proprietà di confronto,

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx = M(b-a)$$

Ponendo $\quad y = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ (la media integrale di f)

si ha

$$\min_{[a,b]} f = m \leq y \leq M = \max_{[a,b]} f$$

Quindi per il teorema dei valori intermedi

$\exists\, c \in [a,b]$ tale che

$$\underline{f(c) = y}$$

N.B.: il Teorema della media integrale **non si applica** a tutte funzioni integrabili:

consideriamo la funzione $f: [0,2] \to \mathbb{R}$

data da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \\ 2 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Allora f è integrabile e si ha

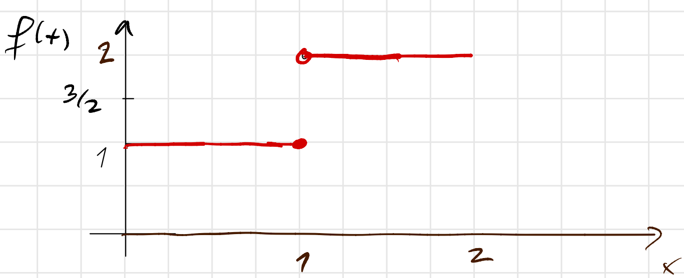
$$\int_0^2 f(x)\,dx \underset{\text{additività}}{=} \int_0^1 \underbrace{f(x)}_{=1}\,dx + \int_1^2 \underbrace{f(x)}_{=2}\,dx$$

$$= 1 + 2 = 3.$$

Quindi
$$\frac{\int_0^2 f(x)\,dx}{2} = \frac{3}{2}$$

ma non esiste alcun $c \in [0,2]$ tale che

$$f(c) = 3/2$$



5.12.2023

Convenzione se f è integrabile in $[a,b]$ e $\alpha, \beta \in [a,b]$ sono tali che $\alpha < \beta$, allora

$$\int_\beta^\alpha f(x)\,dx = -\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

In particolare $\forall\, \alpha \in [a,b]$: $\int_\alpha^\alpha f(x)\,dx = 0$

Primitive

Def.: sia $f: A \to \mathbb{R}$. Se esiste una funzione $F: A \to \mathbb{R}$ derivabile in A e tale che

$$\forall x \in A: \quad F'(x) = f(x),$$

allora chiamiamo F **primitiva** di f.

N.B. 1) se F è una primitiva di f, allora lo è anche la funzione $F + c$ per ogni $c \in \mathbb{R}$.

Se f ammette una primitiva, allora indicheremo la famiglia di tutte le primitive di f con il simbolo

$$\int f(x)\,dx$$

Quindi se $F(x) = \int f(x)\,dx$, allora $F'(x) = f(x)$

---

2) Non tutte le funzioni integrabili ammetto una primitiva! Ad esempio la funzione

$f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1] \\ -1 & \text{se } x \in [-1, 0) \end{cases}$

Quindi f è integrabile, in quanto continua a tratti, ma non ammette alcuna primitiva.

Infatti, se $F'(x) = 1 \quad \forall x \in [0, 1]$ e $F'(x) = -1 \quad \forall x \in [-1, 0)$

allora $F'_+(0) = 1$ e $F'_-(0) = -1$

Dunque F non è derivabile in $x=0$.

1° Teorema Fondamentale del calcolo: sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una continua. Sia $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ data da

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt\ ,\qquad x\in[a,b]$$

Allora F è derivabile in (a,b) e vale

$$\forall x\in(a,b):\quad F'(x)=f(x)$$

Dim.: sia $x\in(a,b)$ e sia h sufficientemente piccolo tale che $x+h\in[a,b]$ e $x-h\in[a,b]$.

Devo calcolare $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$

Per additività dell'integrale si ha

$$F(x+h)=\int_a^{x+h} f(t)\,dt=\underbrace{\int_a^{x} f(t)\,dt}_{=F(x)}+\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow\quad F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

- se $h>0$, allora per il Teorema della media integrale esiste $c_h\in[x,x+h]$ tale che

$$h\,f(c_h)=\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

- se $h < 0$, allora $\int_x^{x+h} f(t)\,dt = -\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt$

applico il Teo della media integrale a $\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt$

$\Rightarrow \exists\ \tilde{c}_h \in [x+h, x]$, tale che

$$f(\tilde{c}_h) = \frac{\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt}{-h}$$

$$\Rightarrow \qquad h\, f(\tilde{c}_h) = -\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Quindi

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \begin{cases} f(c_h) & \text{se } h > 0 \\ f(\tilde{c}_h) & \text{se } h < 0 \end{cases}$$

Ricordo: $\quad c_h \in [x, x+h] \quad h > 0$

$\qquad\qquad \tilde{c}_h \in [x+h, x] \quad h < 0$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{h \to 0} c_h = \lim_{h \to 0} \tilde{c}_h = x$$

E siccome f e' continua, questo implica

che

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \begin{cases} f(c_h) & \text{se } h > 0 \\ f(\tilde{c}_h) & \text{se } h < 0 \end{cases} = f(x)$$

$$\Rightarrow \qquad F'(x) = f(x)$$

Teorema: sia $f: A \to \mathbb{R}$ e siano $F, G: A \to \mathbb{R}$ due primitive di f. Se A è un intervallo, allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tale che

$$F(x) - G(x) = c \qquad \forall x \in A$$

Dim.: sia $H: A \to \mathbb{R}$ data da $H(x) = F(x) - G(x)$

Siccome $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = f(x)$ $\forall x \in A$, si ha

$$H'(x) = 0 \qquad \forall x \in A$$

A è un intervallo, quindi il Teo della derivata nulla H è una funzione costante.

2° Teorema fondamentale del calcolo: sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia G una primitiva di f. Allora vale

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) =: \left[G(x)\right]_a^b$$

Dim.: Sia

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$\Rightarrow$ F e G sono due primitive di f e quindi $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x \in [a,b]: \quad F(x) = G(x) + c \qquad (*)$$

(i) pongo $x = a$, siccome $F(a) = 0$, si ha

$G(a) = -c$

(ii) Pongo $x = b$ in $(*)$:

$$F(b) = G(b) + c = G(b) - G(a)$$

$$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Primitive di alcune funzioni elementari

1) $f(x) = x^a \Rightarrow \int f(x)\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$
   $x > 0,\ a \neq -1$

2) $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int f(x)\,dx = \log|x| + c$

3) $f(x) = \sin x \Rightarrow \int f(x)\,dx = -\cos x + c$

4) $f(x) = \cos x \Rightarrow \int f(x)\,dx = \sin x + c$

5) $f(x) = e^x \Rightarrow \int f(x)\,dx = e^x + c$

6) $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int f(x)\,dx = \arctan(x) + c$

Esempio

$$\int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^2}{1+x^2}\right)dx\,;$$

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

Quindi per linearità si ha

$$\int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^2}{1+x^2}\right) dx = \int_0^1 x^3\, dx + \int_0^1 1\, dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$= \underbrace{\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\left[x\right]_0^1}_{1} - \underbrace{\left[\arctan(x)\right]_0^1}_{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{5-\pi}{4}$$

Integrazione per parti

Proposizione: siano $f, g \in C^1[a,b]$. Allora la formula di integrazione per parti:

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = \left[f(x)\, g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$$

Dim.: la formula di Leibniz dice che

$$\left(f(x)\, g(x)\right)' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

Quindi $f(x)\, g(x)$ è una primitiva di $f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$

Per il 2° Teo fondamentale si ha

$$\int_a^b \left[f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)\right] dx = \left[f(x)\, g(x)\right]_a^b$$

Esempio: calcolare $\int_1^2 1 \cdot \log x \, dx$

applico la formula di integrazio per parti con

$$f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x$$
$$g(x) = \log x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$$

Quindi

$$\int_1^2 \log x = \left[x \log x\right]_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$
$$= 2\log 2 - \int_1^2 1 \, dx$$
$$= 2\log 2 - \underbrace{\left[x\right]_1^2}_{=1} = \underline{2\log 2 - 1}$$

Applicazione al calcolo di integrale di Riemann

11.12. 2023

Consideriamo 2 classi di integrali

(1) $\int_a^b P_n(x) \log x \, dx$ oppure $\int_a^b P_n(x) \arctan(x) \, dx$

dove P_n e' un polinomio di grado $n \in \mathbb{N}$.

Applico la formula di integrazione per parti

con

$$f'(x) = P_n(x) \quad e \quad g(x) = \log x \quad o \quad g(x) = \arctan(x)$$

Esempi: 1) $\int_1^2 x^2 \log x \, dx$

pongo $f'(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3}$

$g(x) = \log x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$

Quindi la formula di integrazione per parti implica:

$$\int_1^2 x^2 \log x \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\log x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{8}{3}\log 2 - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2\,dx$$

$$= \frac{8}{3}\log 2 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \frac{8}{3}\log 2 - \frac{1}{3}\frac{7}{3} = \underline{\frac{8}{3}\log 2 - \frac{7}{9}}$$

---

2) $\int_0^1 x \arctan(x)\,dx$; pongo $f'(x) = x$

$g(x) = \arctan(x)$

Quindi $f(x) = \frac{x^2}{2}$ e $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

e integrando per parti ottengo

$$\int_0^1 x \arctan(x)\,dx = \underbrace{\left[\frac{x^2}{2}\arctan(x)\right]_0^1}_{=\frac{\pi}{8}} - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx \; ; \quad \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 1\,dx}_{=1} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\arctan(x)\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\arctan(1)}_{=\frac{\pi}{4}} - 0\Big) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

---

(2) $\displaystyle\int_a^b P_n(x)\, e^x\, dx$ oppure $\displaystyle\int_a^b P_n(x) \begin{cases} \sin x \\ \cos x \end{cases} dx$

Applico l'integrazione per parti con

$f'(x) = e^x$ oppure $f'(x) = \begin{cases} \sin x \\ \cos x \end{cases}$

e

$g(x) = P_n(x)$

Esempi

1) $\displaystyle\int_0^1 x\, e^x\, dx$;

pongo

$f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x$

$g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$

Quindi

$$\int_0^1 x\, e^x\, dx = \underbrace{\left[x e^x\right]_0^1}_{=e} - \int_0^1 e^x\, dx$$

$$= e - \left[e^x\right]_0^1 = e - (e-1) = 1$$

---

2) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx$;

integro per parti con

$f'(x) = \sin x$ e $g(x) = x^2$

$\Rightarrow f(x) = -\cos x \quad g'(x) = 2x$

Quindi

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx = \underbrace{\left[-x^2 \cos x\right]_0^{\pi}}_{\pi^2} + \int_0^{\pi} 2x \cos x \, dx$$

$$= \pi^2 + 2 \int_0^{\pi} x \cos x \, dx$$

integro per parti con

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f(x) = \sin x$$
$$g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$$

Dunque

$$\int_0^{\pi} x \cos x \, dx = \underbrace{\left[x \sin x\right]_0^{\pi}}_{= 0} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

$$= + \left[\cos x\right]_0^{\pi} = \underline{-1-1 = -2}$$

In totale

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx = \underline{\pi^2 - 4}$$

N.B.: la formula di integrazione per parti può essere applicata anche al calcolo di primitive:

$f, g \in C^1$:

$$\int f'(x) g(x) \, dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) \, dx$$

Integrazione per sostituzione

passiamo dalla variabile $x \in [a, b]$ alla variabile $t \in [c,d]$ tramite una funzione

$\varphi : [c,d] \to [a,b]$ tale che

$$x = \varphi(t)$$

Proposizione: sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ una funzione biiettiva e di classe C^1. Allora vale

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt}$$

dove $\varphi^{-1} : [a,b] \to [c,d]$ è la funzione inversa di φ.

Dim.: sia F una primitiva di f. Considero la funzione $F \circ \varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$. Si ha

$$\frac{d}{dt}(F \circ \varphi)(t) = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t)$$
$$= f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$$

Quindi $F \circ \varphi$ è una primitiva di $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$

$$\Rightarrow \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \Big[F(\varphi(t))\Big]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}$$

$$= F(\varphi(\varphi^{-1}(b))) - F(\varphi(\varphi^{-1}(a)))$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

→ 2° Teorema fondamentale.

N.B.: 1) occore cambiare gli estremi di integrazione:

$$a \longmapsto \varphi^{-1}(a), \qquad b \longmapsto \varphi^{-1}(b)$$

2) Nelle applicazioni si usa la formula inversa, cioè: $\underline{t = \varphi^{-1}(x)}$

Esempio

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Pongo $t = \sqrt{x} \Rightarrow t = \varphi^{-1}(x)$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \text{"} \quad dt = \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}} \text{"}$$

$$\Rightarrow \quad dx = 2\sqrt{x}\,dt = \underline{2t\,dt}$$

Quindi

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\substack{\| \\ \frac{1}{t}}} \underbrace{dx}_{\substack{\| \\ 2t\,dt}} = \int_1^{2=\sqrt{4}} e^t \frac{1}{\cancel{t}}\, 2\cancel{t}\,dt$$

$$= 2\int_1^2 e^t\,dt = 2\left[e^t\right]_1^2 =$$

$$= \underline{2(e^2 - e)}$$

Sostituzione nel calcolo di primitive

$f \in C^1, \quad f > 0$

$$\int f^{\alpha}(x)\, f'(x)\, dx = \frac{1}{1+\alpha} f(x)^{\alpha+1} + c, \quad \forall \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log(f(x)) + c$$

$$\int \cos(f(x))\, f'(x)\, dx = \sin(f(x)) + c$$

$$\int \sin(f(x))\, f'(x)\, dx = -\cos(f(x)) + c$$

$$\int e^{f(x)}\, f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\, dx = \arctan(f(x)) + c$$

Esempi:

1. $$\int \tan(x)\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\, dx$$

$$= -\log(|\cos x|) + c$$

2. $$\int \frac{1+x}{1+x^2}\, dx = \underbrace{\int \frac{1}{1+x^2}\, dx}_{\arctan(x)} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx$$

$$= \arctan x + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx$$

$$= \arctan x + \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c$$

Prova: $\left(\arctan x + \frac{1}{2} \log(1+x^2)\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x$

$$= \frac{1+x}{1+x^2} \quad \text{OK}$$

Integrazione di funzioni razionali fratte

- consideriamo le funzioni razionali fratte di tipo

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + bx + c} \qquad \text{dove } \alpha, \beta, b, c \in \mathbb{R}$$

Distingueremo due casi:

1. $b^2 > 4c$, in questo caso si ha

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2),$$

dove

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

scrivo

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + bx + c} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$$

→ trovo i coefficienti A e B. Poi

$$\int f(x)\, dx = \int \frac{A}{x - x_1}\, dx + \int \frac{B}{x - x_2}\, dx$$

$$= A \log|x - x_1| + B \log|x - x_2| + c$$

(2) $\underline{b^2 \leq 4c}$: scrivo

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \underbrace{c - \frac{b^2}{4}}_{\geq 0}$$

Esempi:

1, $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-2x-3}$; $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $b = -2$, $c = -3$

$b^2 = 4 > 4c = -12$

$\Rightarrow$ caso (1)

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$$

Scrivo
$$\frac{2x+1}{x^2-2x-3} = \frac{2x+1}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

Trovo A e B :
$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax + A + Bx - 3B}{(x-3)(x+1)}$$
$$= \frac{2x+1}{(x-3)(x+1)}$$

Quindi

$$x(A+B) + A - 3B = 2x + 1 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \quad A + B = 2 \longrightarrow 1 + 4B = 2 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{4}$$

$$A - 3B = 1, \quad A = 1 + 3B$$

$$A = \frac{7}{4}$$

Quindi
$$\int \frac{2x+1}{x^2-2x-3}\,dx = \frac{7}{4}\int \frac{1}{x-3}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$= \frac{7}{4} \log|x-3| + \frac{1}{4} \log|x+1| + c$$

12.12.2023

2) $$\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,dx$$

$b = 2,\quad c = 2 \Rightarrow b^2 < 4c \Rightarrow$ caso 2 :

$$x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$$

Scrivo

$$\frac{x}{(x+1)^2+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1} - \frac{1}{(x+1)^2+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{(x+1)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(1+(x+1)^2\right) - \arctan(x+1) + c$$

Integrazione di funzioni trigonometriche

- consideriamo le funzioni della forma

$$f(x) = R(\sin x, \cos x),$$

dove $R(a,b)$ è una funzione razionale fratta di due variabili

Vi sono le seguenti regole:

1) Se R è dispari in $\sin x$, cioè se

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$ allora

pongo $t = \cos x$

2) Se R è dispari in $\cos x$, cioè se

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$ allora

pongo $t = \sin x$

---

3) Se $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, allora

pongo $t = \tan x$

---

4) In tutti gli altri casi pongo

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$ (da evitare se possibile).

Esempi: 1) $\displaystyle\int \frac{\tan x}{1+\sin^2 x}\, dx$

$\rightarrow$ $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{\sin x}{\cos x\,(1+\sin^2 x)}$

$\rightarrow$ R soddisfa 1), 2), 3) Scelgo la sostituzione

$$t = \tan x$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow dx = \cos^2 x \, dt$$

$$t^2 = \tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \cos^2 x \,(1+t^2) = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad ; \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

Quindi

$$\int \frac{\tan x}{1+\sin^2 x} \, dx = \int \frac{t}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{t\cancel{(1+t^2)}}{1+2t^2} \frac{dt}{\cancel{1+t^2}}$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{4t}{1+2t^2} \, dt$$

$$= \frac{1}{4} \log(1+2t^2) + c$$

$$= \frac{1}{4} \log(1+2\tan^2 x) + c$$

Prova:

$$\left(\frac{1}{4} \log(1+2\tan^2 x)\right)' =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{1+2\tan^2 x} \frac{4\tan x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\tan x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x} = \frac{\tan x}{1 + \sin^2 x}$$ $\underline{OK}$

---

2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\, dx$; $\quad R(\sin x, \cos x) = \dfrac{1}{\sin x}$

$\Rightarrow$ R e' dispari in $\sin x$ $\Rightarrow$ 1 pongo

$$t = \cos x$$

$$\frac{dt}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = -\frac{dt}{\sin x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sin x}\, dx = -\int \frac{dt}{\sin^2 x} = -\int \frac{dt}{1-t^2}$$

[perche' $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2$]

$$= \underline{\int \frac{dt}{t^2-1}}$$; $\quad t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$

$$\frac{1}{t^2-1} = \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\frac{1}{2}$$

[Più in generale:

$$\frac{1}{(t-a)(t-b)} = \left(\frac{1}{t-b} - \frac{1}{t-a}\right)\frac{1}{b-a}$$]

Quindi

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1}$$

$$= \frac{1}{2}\log|t-1| - \frac{1}{2}\log|t+1| + c$$

$$= \frac{1}{2} \log|1-\cos x| - \frac{1}{2}\log|1+\cos x| + c$$

$$= \frac{1}{2} \log\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + c$$

Esercizio:

$$\int \frac{1}{\cos x}\, dx$$
