



Limiti

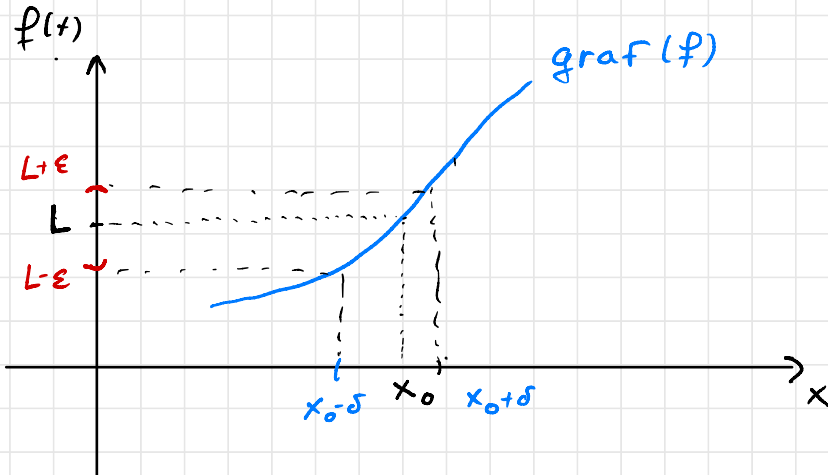
Def.: sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un p.a.c. di $A = \text{dom}(f)$. Diciamo che f ammette limite $L \in \mathbb{R}$ per x che tende a x_0 e scriviamo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}) :$$

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$



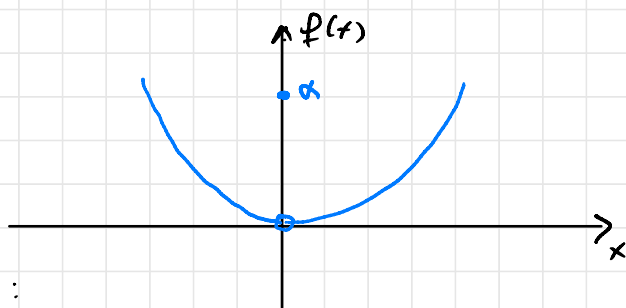
N.B.: 1, la definizione del limite non richiede che $x_0 \in \text{dom}(f)$.

Anche se $x_0 \in \text{dom}(f)$, il valore di $f(x_0)$ non influenza il valore del limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Esempio: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \alpha \in \mathbb{R} \\ \alpha \neq 0 \end{matrix}$$



$x_0 = 0$:

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ indipendentemente dal valore di α .

Infatti, sia $\varepsilon > 0$. Pongo $\delta = \sqrt{\varepsilon}$

Allora $\forall x \in I_\delta(0) \setminus \{0\} \Leftrightarrow$

$\forall x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$:

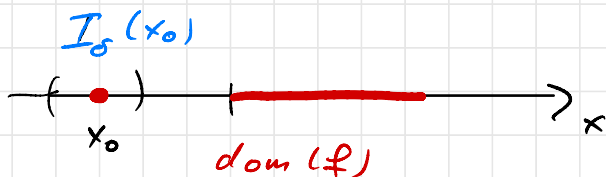
$$|f(x) - 0| = |f(x)| = x^2 < \delta^2 = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

2, Perché x_0 deve essere un p.a.c. di $\text{dom}(f)$? Perché x deve avvicinarsi indefinidamente a x_0 *rimanendo* nel dominio di f .

In particolare, se x_0 è un punto *isolato* di $\text{dom}(f)$, allora $\exists \delta > 0$ tale che $\overset{A}{\text{ "A" }}$

$$\underline{I_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}) = \emptyset}$$



Es.: $f(x) = \sqrt{x^2(x-2)}$

$$\begin{aligned} \text{dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} : x^2(x-2) \geq 0\} \\ &= \{0\} \cup [2, +\infty) \end{aligned}$$

Teorema (unicità del limite): sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia x_0 un p.a.c. di A . Sia inoltre $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che $\exists L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2$$

Allora $L_1 = L_2$.

Disuguaglianza triangolare: $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$\underline{|x + y| \leq |x| + |y|} \quad (\text{esercizio})$$

Dim.: sia $\varepsilon > 0$ arbitrario.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1 \Rightarrow \exists \delta_1 > 0:$$

$$\forall x \in I_{\delta_1}(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}) : |f(x) - L_1| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2 \Rightarrow \exists \delta_2 > 0:$$

$$\forall x \in I_{\delta_2}(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}) : |f(x) - L_2| < \varepsilon$$

$$\text{Pongo } \delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \} \Rightarrow$$

$$\forall x \in I_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}): |f(x) - L_1| < \varepsilon$$

e

$$|f(x) - L_2| < \varepsilon$$

Dunque,

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2|$$

$$\stackrel{\text{dis. } \Delta}{\Rightarrow} \leq \underbrace{|L_1 - f(x)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|f(x) - L_2|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon$$

Quindi

$$\forall \varepsilon > 0: |L_1 - L_2| < 2\varepsilon \Rightarrow |L_1 - L_2| = 0.$$

$$\Rightarrow L_1 = L_2.$$

Estensione della definizione del limite

- dare senso alla formula

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

nei casi in cui $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$

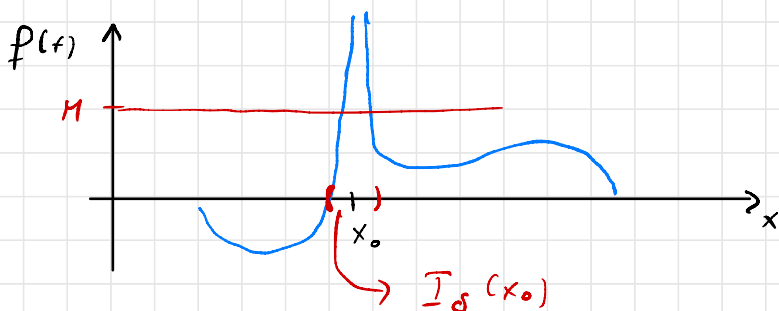
$$\text{e/o } L \in \{-\infty, +\infty\}$$

$$1) \quad \underline{x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad L \in \{-\infty, +\infty\}}$$

$$\underline{1a)} \quad L = +\infty: \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

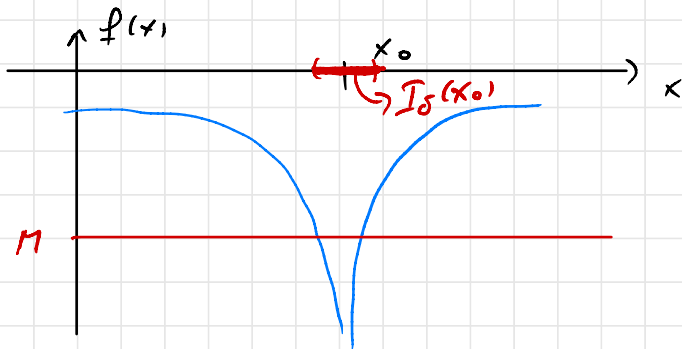
se

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}) : f(x) > M$$



1b) $L = -\infty$: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}) : f(x) < M.$$

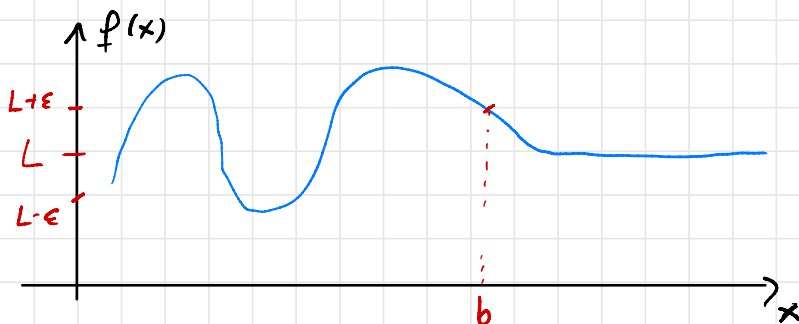


2, $L \in \mathbb{R}$, $x_0 = \pm \infty$.

Supponiamo che f sia definita nei intorno di $\pm \infty$.

2a, $x_0 = +\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists b \in \mathbb{R} : \forall x > b \text{ e } x \in A : |f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{dom}(f)$$

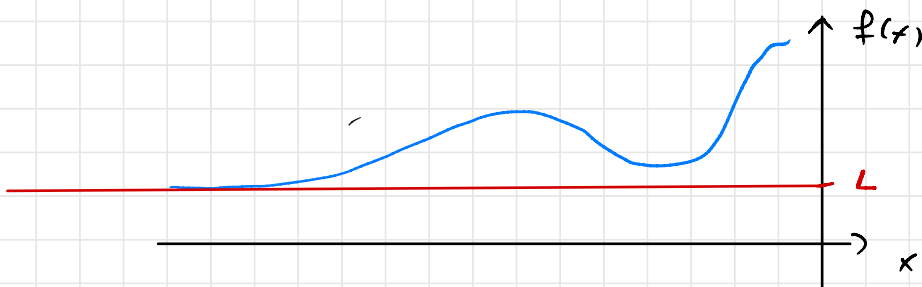


$$|f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

2b, $x_0 = -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists b \in \mathbb{R} : \forall x < b \text{ e } x \in A : |f(x) - L| < \varepsilon$$

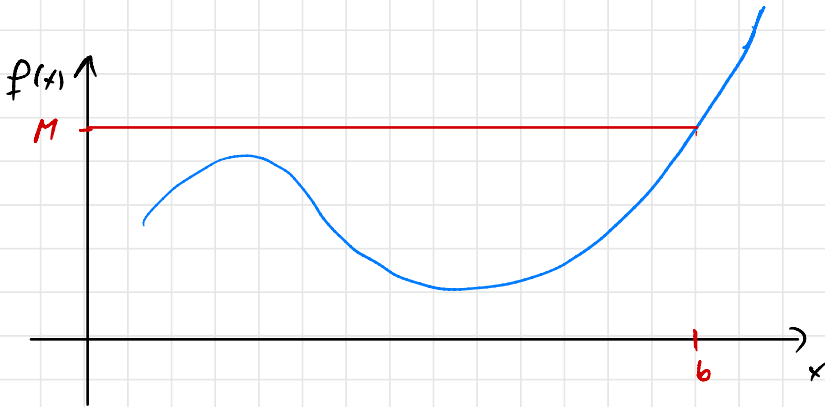
$$(\forall x \in (-\infty, b) \cap A)$$



3, $x_0 = \pm \infty$ e $L = \pm \infty$

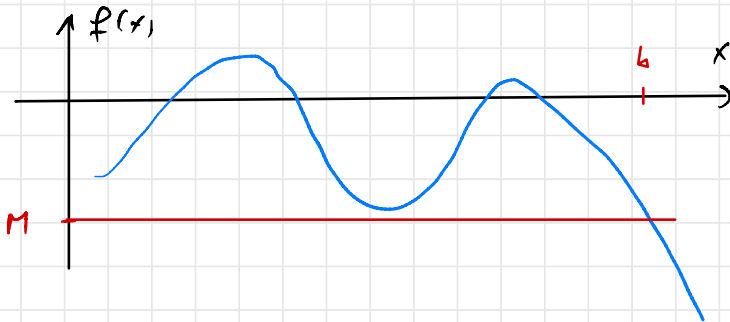
3a) $x_0 = +\infty$, $L = +\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, se

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R} : \forall x \in (b, +\infty) \cap A : f(x) > M$$



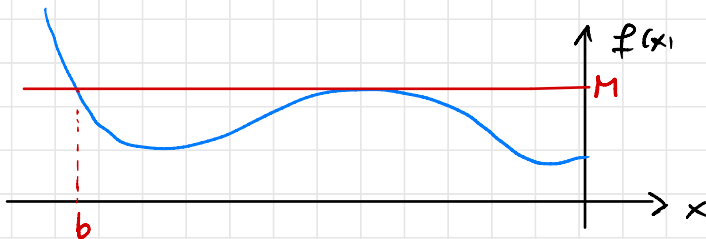
3 b) $x_0 = +\infty, L = -\infty : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, se

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R} : \forall x \in (b, +\infty) \cap A : f(x) < M$$



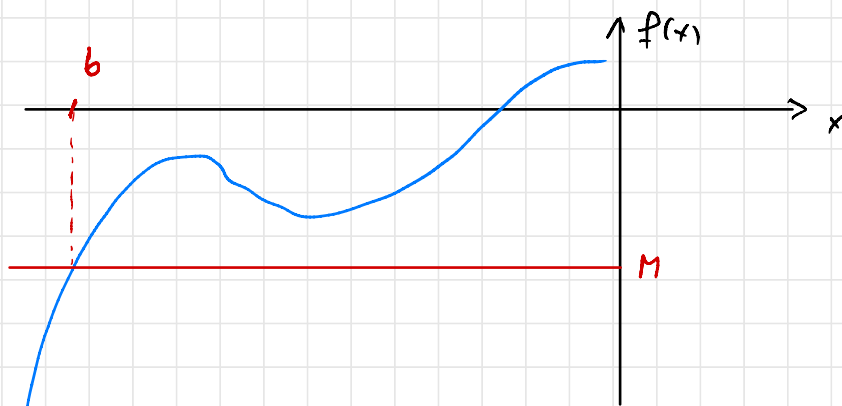
3 c) $x_0 = -\infty, L = +\infty : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, se

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R} : \forall x \in (-\infty, b) \cap A : f(x) > M$$



3d, $x_0 = -\infty$ e $L = -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, se

$\forall M \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R} : \forall x \in (-\infty, b) \cap A : f(x) < M$



Algebra dei limiti

Siano $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un

p.a.c. di A . Supponiamo che $\exists L \in \overline{\mathbb{R}}$

e $M \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$$

Allora le seguenti formule:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = L + M$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad \text{se } M \neq 0$$

valgono in assenza di forme indeterminate:

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Caso $M = 0$: sia $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$
 $L \neq 0$

e sia $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

Ci sono 3 possibilità:

1) se $\exists \delta > 0$ tale che

$\forall x \in I_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}) : \underline{g(x) > 0}$, allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } L > 0 \\ -\infty & \text{se } L < 0 \end{cases}$$

2, se $\exists \delta > 0$ tale che

$\forall x \in I_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\})$: $g(x) < 0$, allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{se } L > 0 \\ +\infty & \text{se } L < 0 \end{cases}$$

3, La funzione g cambia segno in ogni intorno di x_0 , cioè $\forall \delta > 0$

$\exists x_1, x_2 \in I_\delta(x_0) \cap A$: $g(x_1)g(x_2) < 0$.

Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ~~$\exists$~~

Esempio sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = 1 - x^2$

1, sia $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = x^2$

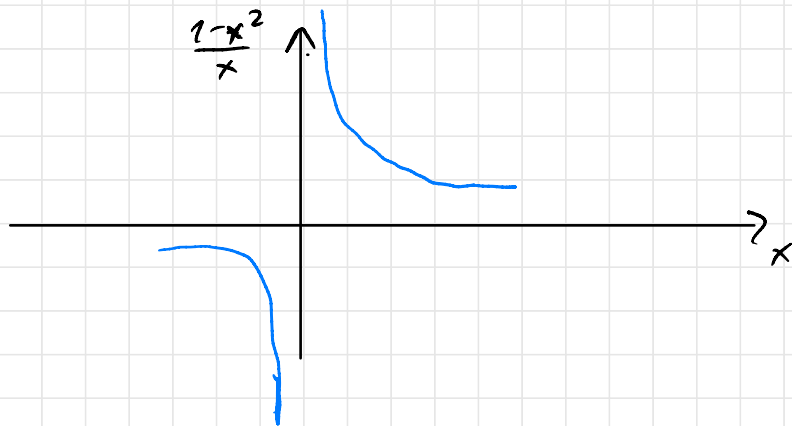
Allora per $x_0 = 0$, si ha: $g(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{x^2} = +\infty$$

2, sia $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x$

g cambia segno in ogni intorno di

$$0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{x} \quad \exists$$



Teorema (della permanenza del segno) : sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un p.a.c. di A e supponiamo che

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}, \quad L \neq 0.$$

Allora esiste un intorno di x_0 in cui la funzione f ha lo stesso segno di L .

Dim.: supponiamo per esempio che $L > 0$.

Applico la def. di

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

con $\varepsilon = L/2$. Quindi $\exists \delta > 0$ tale che

$$\forall x \in I_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}) : |f(x) - L| < \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2} \Rightarrow f(x) > 0.$$

Teorema del confronto : sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e

siano $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\forall x \in A: f(x) \leq g(x).$$

Sia inoltre $x_0 \in \mathbb{R}$ un p.a.c. di A

e supponiamo che esistano i limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M.$$

Allora

$$\underline{L \leq M.}$$

17.10.2023

Dim.: supponiamo, per assurdo, che $L > M$.

Allora per algebra dei limiti vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = L - M > 0$$


Quindi per il Teo della permanenza del segno applicato alla funzione $f - g$ esiste un intorno di x_0 in cui

$f(x) > g(x)$. Contraddizione con

l'ipotesi del teorema. Dunque $L \leq M$.

Teorema dei due carabinieri: sia $A \subseteq \mathbb{R}$

e siano $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un

p.a.c. di A . Supponiamo che

$$\forall x \in A: \quad \underline{h(x) \leq f(x) \leq g(x)}$$

Se le funzioni h e g ammettono limiti

finiti per $x \rightarrow x_0$ e se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \in \mathbb{R},$$

allora

$$\underline{\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L}$$

Dim.: Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \Rightarrow \exists \delta_1 > 0 \text{ tale che}$$

$$\forall x \in I_{\delta_1}(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}): |g(x) - L| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow f(x) - L \leq g(x) - L < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L \Rightarrow \exists \delta_2 > 0 \text{ tale che}$$

$$\forall x \in I_{\delta_2}(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}) : |h(x) - L| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow f(x) - L > h(x) - L > -|h(x) - L| > -\varepsilon$$

Quindi ponendo $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ si ha

$$\forall x \in I_{\delta}(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}) :$$

$$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$$



$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Dunque

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Def. una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **limitata** se $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x \in A : |f(x)| \leq M$$

Non tutte le funzioni limitate

ammettono limite per ogni x_0 p.a.c. di $\text{dom}(f)$.

Esempio: $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

non ammette limite per $x \rightarrow 0$.

N. B.:

$$\forall x \in \text{dom}(f) : |f(x)| \leq 1$$

Consideriamo il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin(1/x)$$

$$\text{Siccome } \forall x \neq 0 : 0 \leq |x \cdot \sin(1/x)| \leq |x|$$

posso applicare il Teo dei 2 carabinieri

$$\text{con } h(x) = 0 \quad \forall x$$

$$\text{e } g(x) = |x| \quad \forall x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin(1/x) = 0$$

Corollario: siano $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia

$x_0 \in \mathbb{R}$ un p.o.c. di A . Supponiamo che

f sia limitata. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$,

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) g(x) = 0$$

Limiti unilateri

Def.: sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

① Supponiamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ sia un p.a.c. di $A \cap (x_0, +\infty)$. Allora diciamo che f ammette limite destro per $x \rightarrow x_0$

e scriviamo $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap A: |f(x) - L| < \varepsilon$$

2) Supponiamo che x_0 sia un p.a.c. di $A \cap (-\infty, x_0)$. Allora diciamo che f ammette limite sinistro e scriviamo

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L, \text{ se}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap A: |f(x) - L| < \varepsilon$$

Es.: se $A = (a, b)$ $a, b \in \mathbb{R}$

allora a, b sono p.a.c. di A , ma
 a non è un p.a.c. di $A \cap (-\infty, a) = \emptyset$

b non è un p.o.c. di $A \cap (b, +\infty) = \emptyset$

Funzioni monotone

Def: sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che f è

- **crescente** se $\forall x, y \in A$:

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- **decrecente** se $\forall x, y \in A$:

$$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

Teorema: sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione **crescente**.

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un p.a.c. di $A \cap (x_0, +\infty)$ e di $A \cap (-\infty, x_0)$. Allora esistono i limiti unilateri di f per $x \rightarrow x_0$ e vale

$$L^+ = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf \{ f(x) : x \in (x_0, +\infty) \cap A \}$$

$$L^- = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup \{ f(x) : x \in (-\infty, x_0) \cap A \}$$

Dim.: sia $m = \inf \{ f(x) : x \in (x_0, +\infty) \cap A \}$

Quindi $\forall x \in A, x > x_0 : m \leq f(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in A, x_\varepsilon > x_0 : f(x_\varepsilon) < m + \varepsilon$

Pongo $\delta = x_\varepsilon - x_0 > 0$ e ottengo:

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap A = (x_0, x_\varepsilon) \cap A:$$

$$m \leq f(x) \leq f(x_\varepsilon) \leq m + \varepsilon \Rightarrow$$

f è crescente

$$|f(x) - m| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = m.$$

$$\text{Sia } M = \sup \{ f(x) : x \in (-\infty, x_0) \cap A \}$$

$$\text{Quindi } 1, \forall x < x_0, x \in A: f(x) \leq M$$

$$2, \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon < x_0, x_\varepsilon \in A: M < f(x_\varepsilon) + \varepsilon$$

Pongo $\delta = x_0 - x_\varepsilon > 0$ e ottengo:

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap A = (x_\varepsilon, x_0) \cap A:$$

$$M - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq M$$

f è crescente

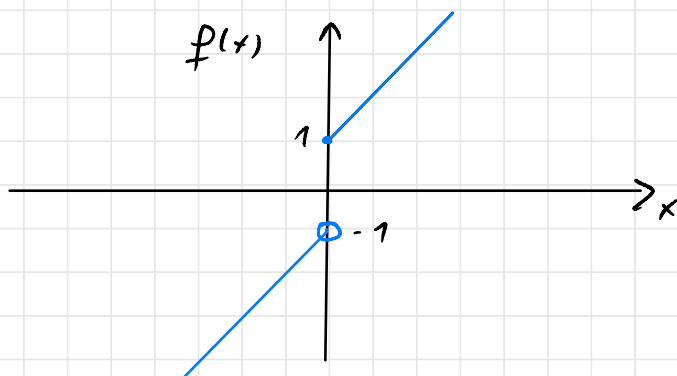
$$\Rightarrow |f(x) - M| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = M.$$

N.B.: L^+ e L^- possono essere diversi!

Esempio: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 0 \\ x-1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



f è crescente $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

Teorema: sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione

decrecente e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un p.a.c. di

$A \cap (x_0, +\infty)$ e di $A \cap (-\infty, x_0)$. Allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \sup \{ f(x) : x \in A \cap (x_0, +\infty) \}$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \inf \{ f(x) : x \in A \cap (-\infty, x_0) \}$$

Teorema: sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un p.a.c. di $A \cap (x_0, +\infty)$ e di $A \cap (-\infty, x_0)$.

Allora f ammette limite per $x \rightarrow x_0$

se e solo se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L^- \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L^+ \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\text{e } \underline{L^- = L^+}$$

$$\text{In tal caso } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L^- = L^+$$

23.10.2023

Limiti notevoli

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+ax)}{x} = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$4, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$5, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

dove $e = 2,71...$ la costante di Eulero

Esempi:

$$1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$$

$$= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x}}_{\parallel \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2}_{\parallel \text{limite notevole}} = \frac{1}{2}$$

$$2, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{2x}}{x} \quad \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\parallel \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + 1 - e^{2x}}{x} = (\text{algebra dei limiti})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = -1$$

// 1 ← limite notevole → // 2

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+3x}}{x} = L \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) con il limite notevole 4):

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 + 1 - \sqrt{1+3x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - 1}{3x}$$

// 4)

$t = 3x$

$$= \frac{1}{2} - 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+t} - 1}{t}$$

// 4)

$$= \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

b) razionalizzazione:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1+3x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+3x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+3x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - (1+3x)}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+3x}}$$

// $\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x} = -\underline{\underline{1}}$$

