



Def.: una **funzione** è data da una terna (f, A, B) dove

- ① $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$
 - ② f è una legge che ad ogni $x \in A$ associa **univocamente** un $f(x) \in B$.
-

Notazione: $A = \text{dom}(f)$... **dominio** di f

$B = \text{codom}(f)$... **codominio** di f .

scriviamo

$$f: A \rightarrow B$$

N.B.: 1, il codominio B non è univocamente determinato dalla funzione. In particolare, se $B = \text{codom}(f)$ e se $B \subseteq C$, allora anche $C = \text{codom}(f)$.

2, due funzioni $f_1: A_1 \rightarrow B$

$$f_2: A_2 \rightarrow B$$

sono **uguali** se

$$\begin{cases} \text{① } A_1 = A_2 \\ \text{② } \forall x \in A_1 : f_1(x) = f_2(x) \end{cases}$$

Def.: sia $f: A \rightarrow B$ una funzione. Chiamiamo

$$\text{im}(f) = \{ f(x) : x \in A \}$$

insieme immagine di f .

N.B.: $\text{im}(f) \subseteq B$

Esempi: 1, sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = x^2$$

Allora $\text{im}(f) = [0, +\infty)$

2, sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

Allora $\text{im}(f) = (0, 1]$

N.B.: $\forall x \geq 0: f(x) > 0$.

Def.: siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$.

Chiamiamo

coppia ordinata

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A \text{ e } b \in B \}$$

prodotto cartesiano di A e B .

In generale,

$$A \times B \neq B \times A$$

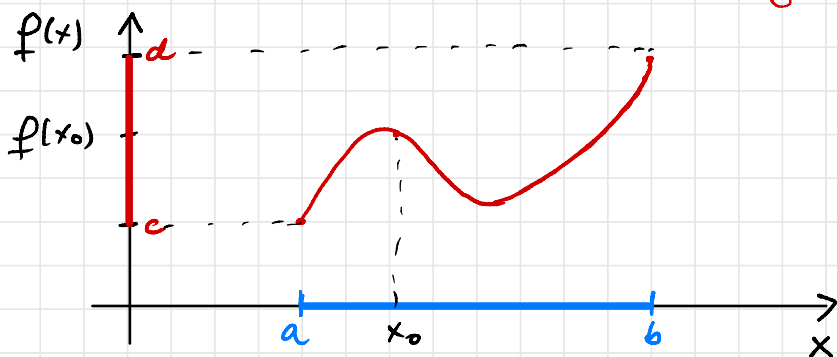
Def.: sia $f: A \rightarrow B$ una Funzione.

Chiamiamo

$$\text{graf}(f) = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}$$

grafico di f .

$\text{graf}(f)$



$$A = [a, b], \quad B = \mathbb{R}$$

$$\text{im}(f) = [c, d]$$

Dominio naturale

è il più grande insieme in cui
l'espressione analitica di f sia ben
definita

Esempi: 1, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

$$\text{dom}(f) = [-2, 2] = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 4\}$$

2, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

$$\text{dom}(f) = (-2, 2)$$

3, In generale, se f è data da somma e/o prodotto di funzioni

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$$

allora

$$\text{dom}(f) = \text{dom}(f_1) \cap \text{dom}(f_2) \cap \dots \cap \text{dom}(f_n)$$

Esercizio assegnato: trovare il dominio della Funzione

$$f(x) = \sqrt{\log(x^2 - 3)} + \frac{\log(x)}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$\log(x) = \log_e(x)$$

$$\text{dom}(f) = [2, 3)$$

9.10.2023

Funzioni iniettive

Def.: una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **iniettiva** se

$$\forall x_1, x_2 \in A: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

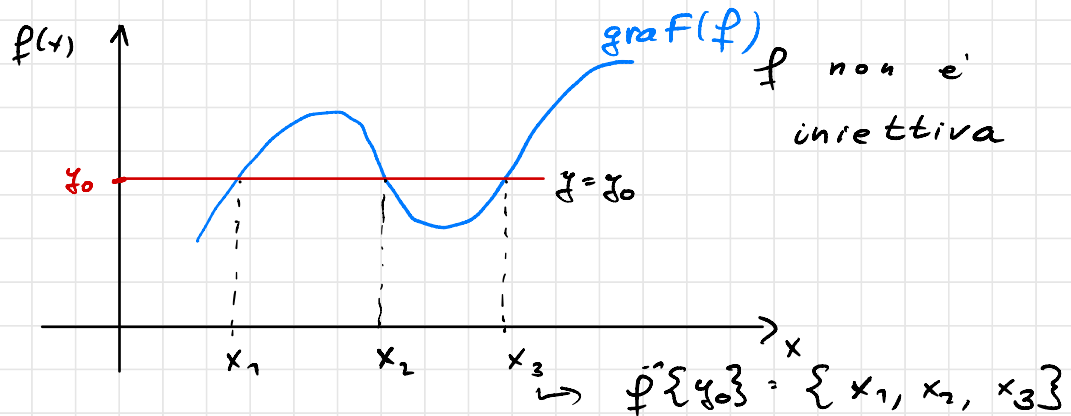
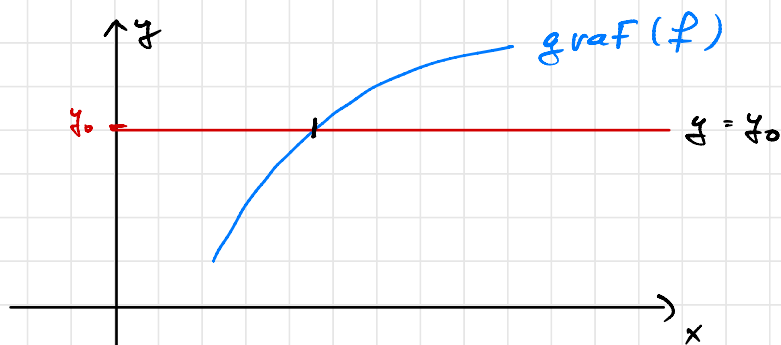
o equivalentemente, se

$$\forall x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Interpretazione geometrica: per ogni

$y_0 \in \text{im}(f)$ vale che la retta $y = y_0$

interseca il $\text{graf}(f)$ esattamente in un punto



Def: sia $f: A \rightarrow B$ e sia $y \in \text{im}(f)$.

Chiamiamo

$$f^{-1}\{y\} = \{x \in A: f(x) = y\}$$

insieme delle controimmagini di y .

Quindi $f: A \rightarrow B$ è iniettiva se e solo se $\forall y \in \text{im}(f): f^{-1}\{y\}$ contiene solo un elemento.

Funzioni suriettive

Def.: una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **suriettiva**, se $\text{im}(f) = B$, cioè se $\forall y \in B \exists x \in A: f(x) = y$

Interpretazione grafica: per ogni $y_0 \in B$ la retta $y = y_0$ interseca $\text{graf}(f)$ in **almeno** un punto.

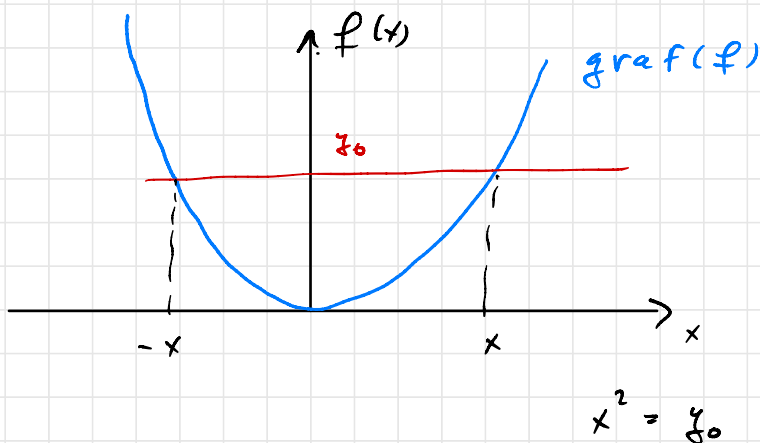
N.B.: ogni funzione si può rendere suriettiva ponendo $B = \text{im}(f)$.

Esempio: la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$ non è suriettiva perché $\text{im}(f) = \{y \in \mathbb{R}: \exists x: f(x) = y\} = [0, +\infty)$

Però la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ data da

$$f(x) = x^2 \quad \text{è suriettiva .}$$

2 f è anche iniettiva? NO! :



Esempi: 1, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = x$$

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R}, \quad \text{codom}(f) = \mathbb{R}, \quad \text{im}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{codom}(f) = \text{im}(f) \Rightarrow f \text{ è suriettiva}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ è iniettiva}$$

$$3, \quad f(x) = \frac{2x+1}{x-1}, \quad f: \text{dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

(i) f è iniettiva? siano $x_1, x_2 \in \text{dom}(f)$

e supponiamo che $f(x_1) = f(x_2)$

$$\text{Quindi} \quad \frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1} \quad / (x_1-1)(x_2-1)$$

$$(2x_1+1)(x_2-1) = (2x_2+1)(x_1-1)$$

$$\cancel{2x_1x_2} - 2x_1 + x_2 - \cancel{1} = \cancel{2x_1x_2} - 2x_2 + x_1 - \cancel{1}$$

$$3x_2 = 3x_1 \Rightarrow$$

$$x_1 = x_2$$

$\Rightarrow f$ è iniettiva.

(ii) f è suriettiva? NO perché

$\text{codom}(f) = \mathbb{R}$, però non esiste

alcun $x \in \text{dom}(f)$ tale che

$$f(x) = 2$$

$$\text{In fatti, se} \quad \frac{2x+1}{x-1} = 2 \quad \text{e} \quad x \neq 1$$

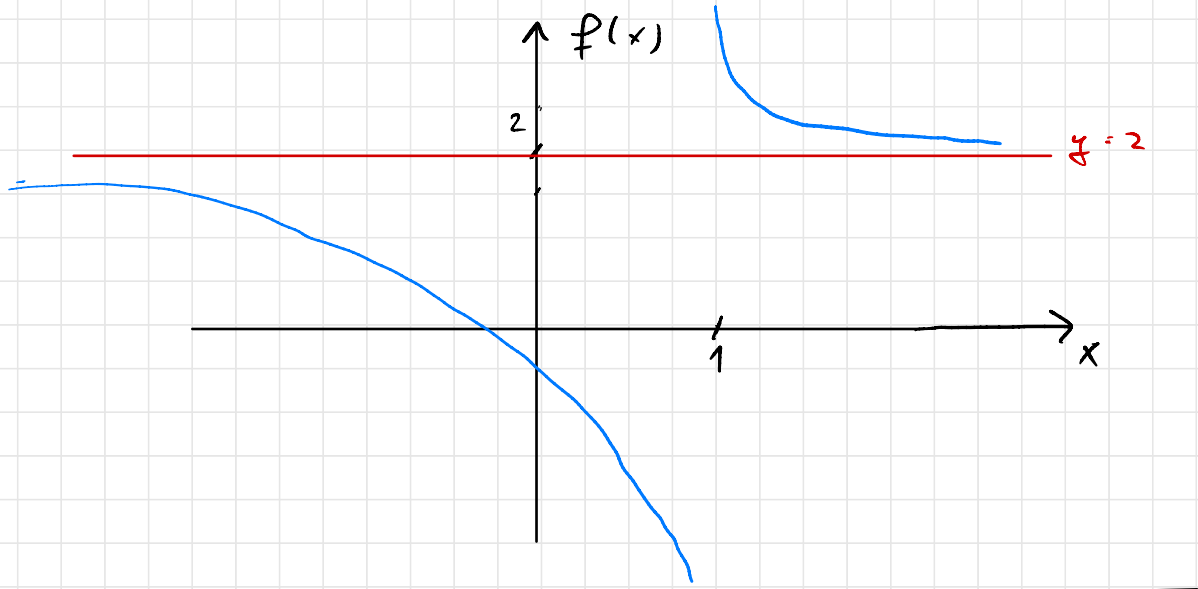
allora

$$2x+1 = 2x-2$$

impossibile

$$\Rightarrow 2 \notin \text{im}(f) \Rightarrow \text{im}(f) \neq \text{codom}(f)$$

N.B.: $\text{im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$:



Funzioni biettive

Def.: una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **biettiva** se e' sia iniettiva che suriettiva.

Funzioni inverse

Def.: una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **invertibile** se

$$\forall y \in B \quad (\exists!) x \in A : f(x) = y$$

$\rightarrow$ "esiste unico"

In tal caso chiamiamo

$$f^{-1}: B \rightarrow A : f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

la funzione **inversa** di f .

N.B.: 1, $\text{dom}(f^{-1}) = \text{im}(f)$

$$\text{im}(f^{-1}) = \text{codom}(f^{-1}) = \text{dom}(f)$$

2, f è invertibile $\Leftrightarrow f$ è biettiva.

$$\begin{aligned} 3, \text{graf}(f^{-1}) &= \{ (y, x) \in B \times A : f^{-1}(y) = x \} \\ &= \{ (y, x) \in B \times A : y = f(x) \} \\ &= \{ (y, x) \in B \times A : (x, y) \in \text{graf}(f) \} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \text{graf}(f^{-1})$ è simmetrico di $\text{graf}(f)$ rispetto alla retta **$x = y$** .

Esempi: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

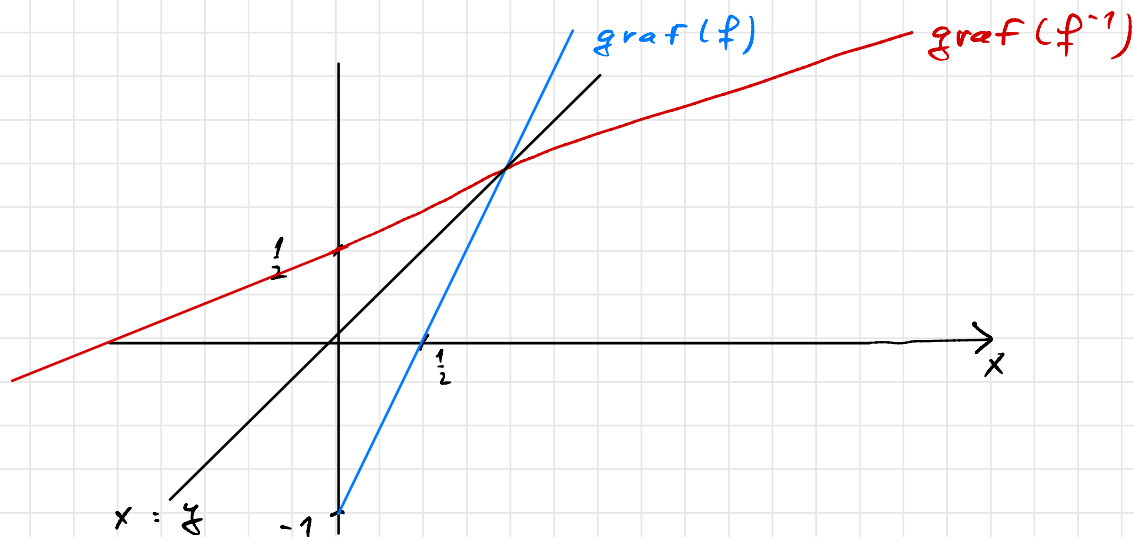
$$f(x) = 2x - 1$$

f è biettiva (**esercizio**) e quindi invertibile con

$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e data da

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x) = 2x - 1$$

$$\Rightarrow \underline{f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}}$$

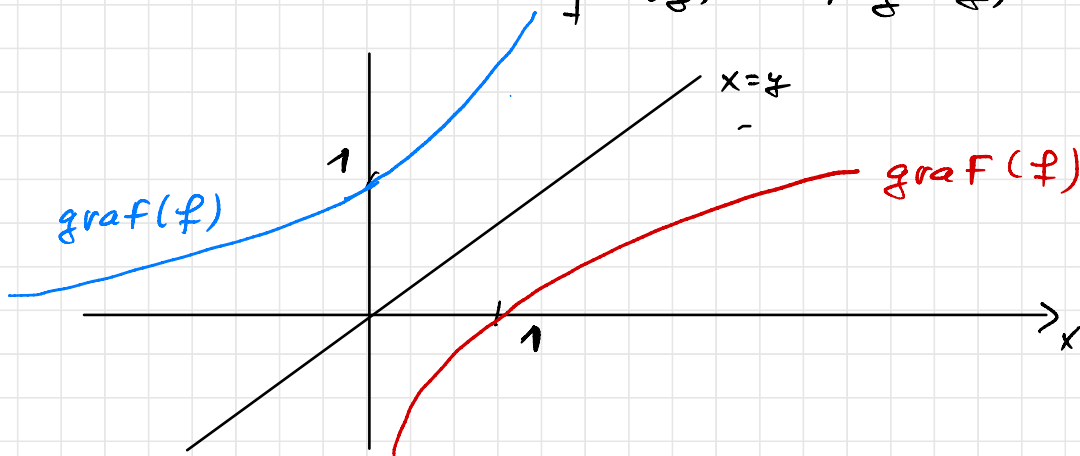


2, $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ data da

$$f(x) = e^x \quad \text{e' biettiva}$$

Funzione inversa: $f^{-1}: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f^{-1}(y) = \log(y)$$



Restrizioni di Funzioni

Def.: sia $f: A \rightarrow B$ e sia $E \subset A = \text{dom}(f)$.

Chiamiamo **restrizione** di f ad E la

funzione

$$f|_E: E \rightarrow B \quad \text{tale che}$$

$$\forall x \in E: f|_E(x) = f(x)$$

N.B.: una funzione $f: A \rightarrow B$ non-iniettiva

si può rendere iniettiva considerandone opportune restrizioni.

Esempio: $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ data da

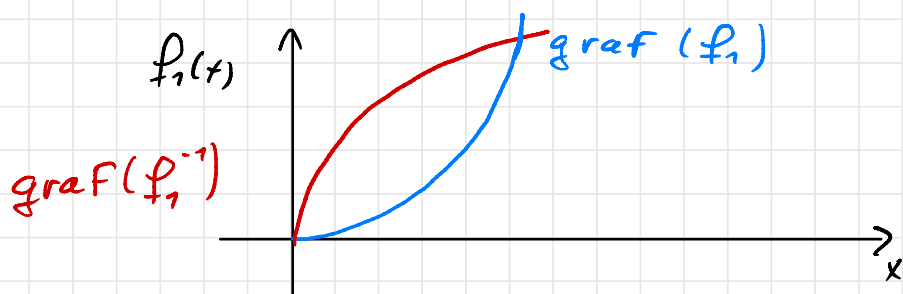
$$f(x) = x^2$$

non è iniettiva

Considero due restrizioni di f :

$$1, E = [0, +\infty) \Rightarrow f_1 = f|_{[0, +\infty)}$$

f_1 è iniettiva



Siccome $\text{im}(f_1) = [0, +\infty)$, la funzione f_1 è anche biettiva e quindi invertibile.

La sua funzione inversa

$$f_1^{-1}: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

soddisfa

$$f_1^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = x^2$$

$$\Rightarrow f_1^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

$$2. f_2 = f|_{[-\infty, 0]} : (-\infty, 0] \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f_2(x) = x^2 \quad \forall x \leq 0.$$

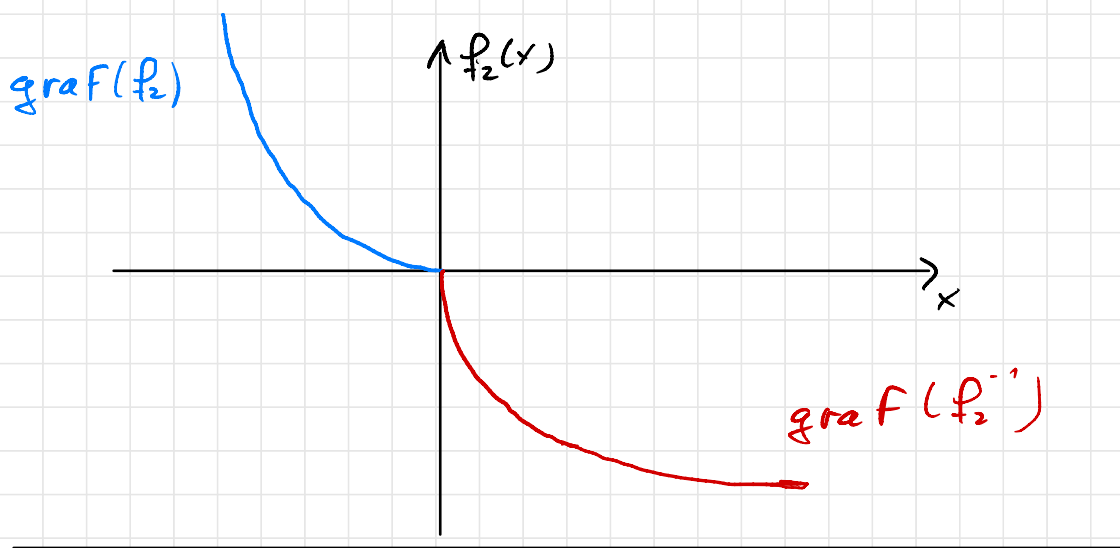
anche f_2 risulta iniettiva e suriettiva e quindi invertibile. La sua funzione inversa

$$f_2^{-1}: [0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0]$$

soddisfa

$$f_2^{-1}(y) = -\sqrt{y}$$

$$\forall y \geq 0$$



Composizione di Funzioni

Def: siano $f: A \rightarrow B$ e $g: B' \rightarrow C$ due Funzioni tali che $\text{im}(f) \subseteq B' = \text{dom}(g)$.

Allora chiamiamo la **composizione** di f con g la funzione

$$g \circ f: A \rightarrow C \quad \text{tale che}$$

$$\forall x \in A: (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Proprietà della composizione:

$$1, \forall x \in A : (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

"dom(f)"

$$2, \forall x \in \text{im}(f) : (f \circ f^{-1})(x) = x$$

$$3, (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

$$4, g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h$$

$$5, g \circ f \neq f \circ g$$

Esempio: $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow (0, +\infty)$ data da

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{data da}$$

$$g(y) = \log(y)$$

Quindi

$$g \circ f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{data da}$$

$$(g \circ f)(x) = \log |x|$$

Dall'altra parte

$$f \circ g: (0, 1) \cup (1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$$

$$(f \circ g)(x) = |\log x|$$

$$\text{im}(g \circ f) = \mathbb{R}$$

$$\text{im}(f \circ g) = (0, +\infty)$$

