12.12.2023

Funzioni convesse

Def.: sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzionzione e sia I un intervallo. Diciamo che f e'

- **convessa** in I, se $\forall\, x_1, x_2 \in I$ e $\forall\, t \in [0,1]$:

$$f(t x_1 + (1-t) x_2) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_2)$$

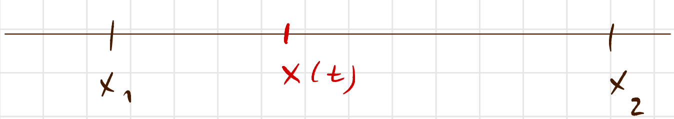
- **concava** in I, se $\forall\, x_1, x_2 \in I$ e $\forall\, t \in [0,1]$:

$$f(t x_1 + (1-t) x_2) \geq t f(x_1) + (1-t) f(x_2)$$

N.B.: 1) la definizione richiede che f sia definita in un intervallo. Altrimenti, se non lo fosse, allora il punto

$$x(t) = t x_1 + (1-t) x_2$$

potrebbe non essere elemento di dom(f)



$t \in [0,1]$

$t=1$ $\quad x(1) = x_1$ $\qquad\qquad x(0) = x_2$

---

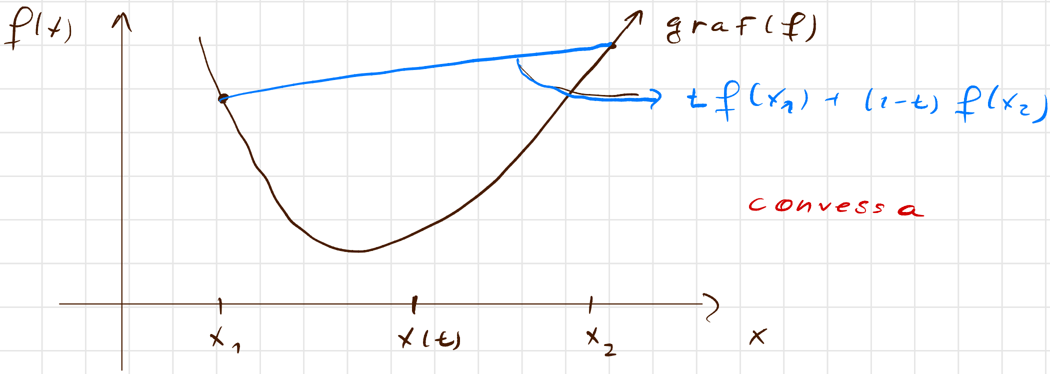
2) la definizione non richiede che f sia derivabile

3) Significato geometrico:

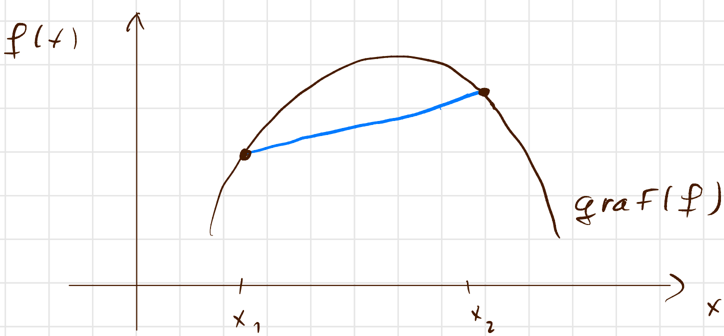
a) f è **convessa** in $I \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I$ il segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ con $(x_2, f(x_2))$ è al di sopra del graf(f)

---

b) f è **concava** in $I \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I$ il segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ con $(x_2, f(x_2))$ è di sotto il graf(f).



convessa



concava

Uniche funzioni che sono contemporaneamente convesse e concave sono le funzioni affini, cioè

$f(x) = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$

Convessità e derivata seconda

Proposizione: sia $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in I e sia I un intervallo. Allora

- f è convessa in I $\iff$ $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in I$
- f è concava in I $\iff$ $f''(x) \leq 0$ $\forall x \in I$

Punti di flesso

Def: sia $f: I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$. Diciamo che x_0 è un punto di flesso di f se esiste $\varepsilon > 0$ tale che f è convessa (oppure concava) in $(x_0 - \varepsilon, x_0)$, e tale che f è concava (oppure convessa) in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$.

N.B.: se f è due volte derivabile in I e se x_0 è un punto di flesso, allora

$$f''(x_0) = 0$$

Tuttavia, questa condizione e' solo necessaria, ma non sufficiente affinché x_0 sia un punto di flesso. Ad esempio la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^4$ e' convessa on $\mathbb{R}$ (perche' $f''(x) \geq 0$), e quindi non ammette alcun punto di flesso. Pero'

$$f''(0) = 0$$

Esercizio: trovare tutti i punti di flesso della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \arctan(x) + \frac{1}{1+x^2}$$