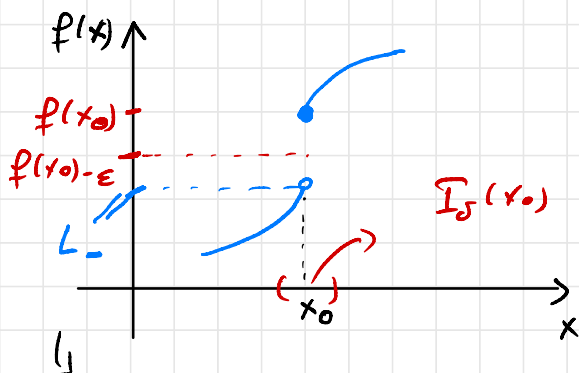




Funzioni continue

Def.: sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che f è continua in $x_0 \in A$ se

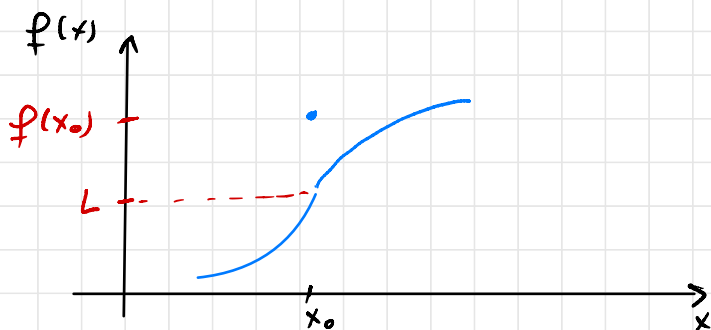
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \cap A : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$



f non è
continua
in x_0

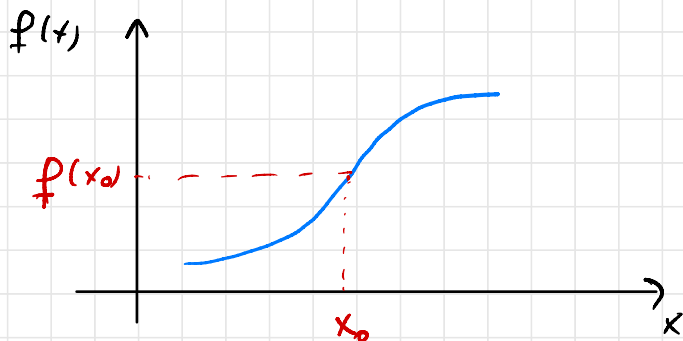
$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_\varepsilon \in I_\delta(x_0) \cap A : |f(x_\varepsilon) - f(x_0)| > \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L_-, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$



f non è
continua
in x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq f(x_0)$$



f è
continua
in x_0

Diciamo che f è continua in $E \subseteq A$
se f è continua in ogni $x \in E$.

N.B.: Tutte le Funzioni elementari sono
continue nel loro dominio naturale:

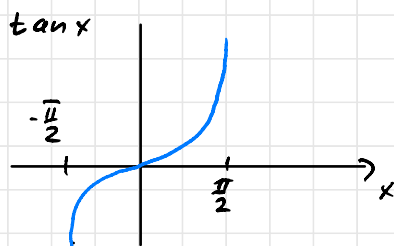
- $\sin x$, $\cos x$, e^x , polinomi:

$$P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

sono continue in $\mathbb{R}$.

$\log x$ è continua in $(0, +\infty)$

$\tan x$ è continua in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$$

Le funzioni razionali :

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \quad \text{dove}$$

P_n = polinomio di grado $n \in \mathbb{N}$

Q_m = polinomio di grado $m \in \mathbb{N}$

sono continue nel loro dominio naturale:

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : Q_m(x) \neq 0\}$$

Teorema (limiti e continuità): sia $A \subseteq \mathbb{R}$

e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che $x_0 \in A$

sia un p.a.c. di A . Allora f è

continua in x_0 **se e solo se** f

ammette limite per $x \rightarrow x_0$ e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Teorema della sostituzione: sia $f: A \rightarrow B$

e sia $g: B \rightarrow \mathbb{R}$. Sia inoltre $x_0 \in \mathbb{R}$ un

p.a.c. di A . Supponiamo che esista il

limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$$

Se la funzione g è continua in B , allora vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y)$$

$$\text{Sost.: } f(x) = y$$

In particolare, se $y_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

Esempi:

$$1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\log(1+2\sin x)} = L \quad \left[\frac{0}{0} \right]$$

applico il Teo della sostituzione con

$$f(x) = \sin x \quad \text{e} \quad g(y) = \frac{\sin(y)}{\log(1+2y)}$$

Quindi

$$L = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{\log(1+2y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} \cdot \frac{y}{\log(1+2y)}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(1+2y)}$$

$$= \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+2y)}{y}} = \frac{1}{2}$$

// 2 ... limite notevole 2,

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x \right)^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x))$$

$$\text{dove } f(x) = \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^3$$

$$g(y) = y^2$$

$$\text{Limite notevole 5, } \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^3$$

Quindi per il Teo della sostituzione si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x} = g(e^3) = (e^3)^2 = \underline{e^6}$$

scrivo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x \right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x \right)^2$$

$$= e^6.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(1 + \arctan(e^x)) = L$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)), \text{ dove}$$

$$f(x) = \arctan(e^x) \text{ e } g(y) = \log(1+y)$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(e^x) = \text{Teo della sost.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctan(y); \quad y = e^x \\ = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{L = \log\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Esercizi assegnati

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x) + e^{3x} - 1}{\sin x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}{x}$$

$$4, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - e^x}{x}$$

24.10.2023

Proprietà di funzioni continue

Teorema (continuità della somma e del prodotto) :

sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$. Sia inoltre $x_0 \in A$ un p.a.c. di A . Se f e g sono continue in x_0 , allora vi sono continue anche le funzioni $f+g$ e $f \cdot g$.

Dim.: f e g sono continue in $x_0 \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$$

Quindi per l'algebra dei limiti si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = f(x_0) + g(x_0) \Rightarrow \text{continuità della somma}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) g(x) = f(x_0) g(x_0) \Rightarrow \text{continuità del prodotto.}$$

N.B.: ogni funzione è continua in tutti i punti isolati del suo dominio.

Teorema (continuità della composizione) :

Sia $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$.

Se f è continua in x_0 e se g è continua in $f(x_0)$, allora la funzione $g \circ f$ è continua in x_0 .

N.B.: I teoremi di sopra forniscono le condizioni **sufficienti**, ma non necessarie.

Teorema di Weierstrass : sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme **chiuso e limitato**. Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione **continua**. Allora f ammette in A massimo e minimo, cioè esistono $x_{\min} \in A$ e $x_{\max} \in A$ tali che

$$\max_A f = \max \{ f(x) : x \in A \} = f(x_{\max})$$

$$\min_A f = \min \{ f(x) : x \in A \} = f(x_{\min})$$

In particolare, f è limitata in A .

N.B.: tutte le ipotesi del Teorema sono fondamentali.

Esempi: 1, $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ data da
 $f(x) = \frac{1}{x}$; $A = (0,1)$

- f è continua in A , ma f non ammette né max né min. In particolare, f non è limitata in A :
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Osservo che A non è chiuso.

2, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

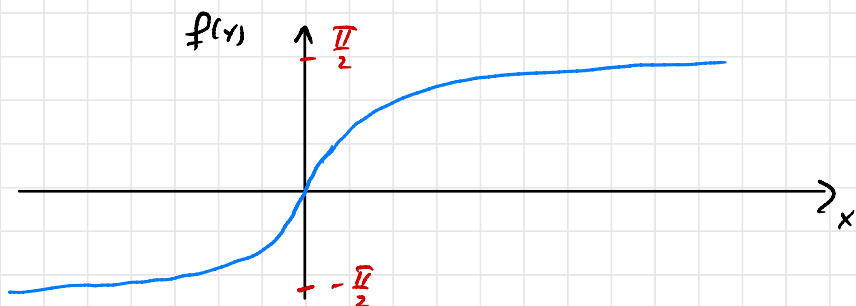
$$f(x) = \arctan(x) \quad ; \quad A = \mathbb{R}$$

- f è continua in A , ma non ammette né min né max:

$$\begin{aligned} \sup \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \} &= \sup \operatorname{im}(f) = \frac{\pi}{2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \end{aligned}$$

$$\inf \{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = \inf \text{im}(f) = -\frac{\pi}{2}$$

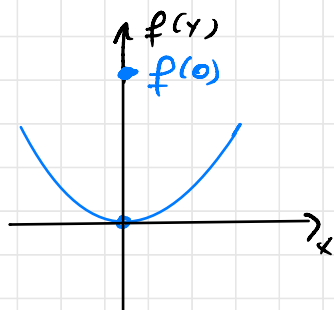
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$



N.B.: $\mathbb{R}$ è chiuso, ma non è limitato.

3, $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



f ammette max:

$$\max_{[-1, 1]} f(x) = 2 = f(0)$$

f non ammette min: $\inf_{[-1, 1]} f = \inf \text{im}(f) = 0$

N.B.: $A = [-1, 1]$ è chiuso e limitato, ma f non è continua in A .

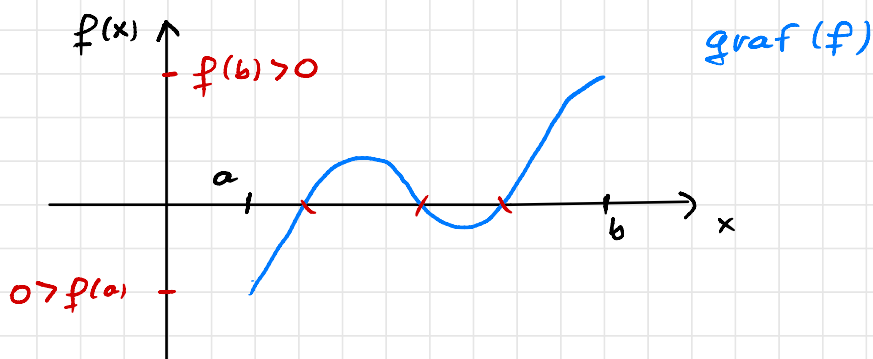
Insiemi chiusi e limitati si chiamano
compatti.

Teorema degli zeri di Bolzano: sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

una funzione continua. Supponiamo che

$$\underline{f(a) f(b) < 0}$$

Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.



N.B.: il Teorema non vale per le funzioni
definite in $A \subseteq \mathbb{Q}$.

Esempio: $f: [-2, 2] \cap \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < \sqrt{2} \\ 1 & \text{se } x > \sqrt{2} \end{cases}$$

$$f(-2) f(2) = -1 < 0$$

f è continua in $[-2, 2] \cap \mathbb{Q}$

f non ammette alcun punto di zero.

Teorema (dei valori intermedi): sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

una funzione continua. Allora

$$\text{im}(f) = \left[\min_{[a, b]} f, \max_{[a, b]} f \right]$$

dove

$$\text{im}(f) = \{ f(x) : x \in [a, b] \} \quad \begin{array}{l} \text{insieme} \\ \text{immagine di } f. \end{array}$$

Dim: sia $y \in \left(\min_{[a, b]} f, \max_{[a, b]} f \right)$

devo dimostrare che esiste $c \in [a, b]$

tale che $f(c) = y$.

Teo di Weierstrass $\Rightarrow \exists x_{\min}$ e $x_{\max}$

tali che

$$\min_{[a, b]} f = f(x_{\min})$$

$$\max_{[a, b]} f = f(x_{\max})$$

Possiamo supporre che $x_{\min} \neq x_{\max}$.

(altrimenti f sarebbe costante)

Considero la funzione

$g: [x_{\min}, x_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\underline{g(x) = f(x) - \gamma}$$

Quindi g è continua e

$$g(x_{\min}) < 0 \quad \text{e} \quad g(x_{\max}) > 0$$

$$\min_{[a,b]} f - \gamma < 0$$

$$\max_{[a,b]} f - \gamma > 0$$

Dunque il Teo di Bolzano implica che

$\exists c \in (x_{\min}, x_{\max})$ tale che

$$g(c) = 0 \Leftrightarrow \underline{f(c) = \gamma}$$

30.10.2023

Punti di discontinuità

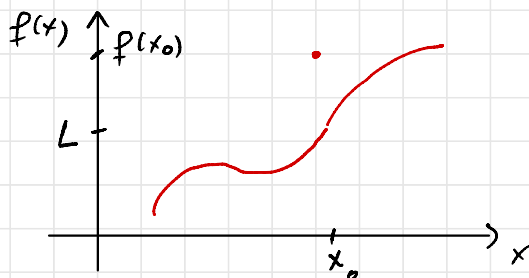
① Def.: sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$. Se esiste

il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ e se

$$L \neq f(x_0),$$

allora diciamo che x_0 è un punto di

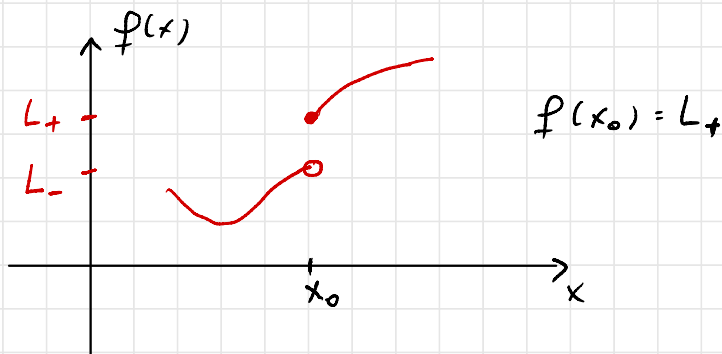
discontinuità eliminabile di f .



② Se esistono finiti i limiti unilaterali

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_+ \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L_-$$

e se $L_+ \neq L_-$, allora diciamo che x_0 è un punto di **salto** di f .



③ Se esistono i limiti unilaterali

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_+ \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L_-$$

e se **almeno** uno di loro è infinito,

allora diciamo che x_0 è un **punto di infinito** di f .

N.B.: un punto di infinito si presenta anche quando $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \{-\infty, +\infty\}$

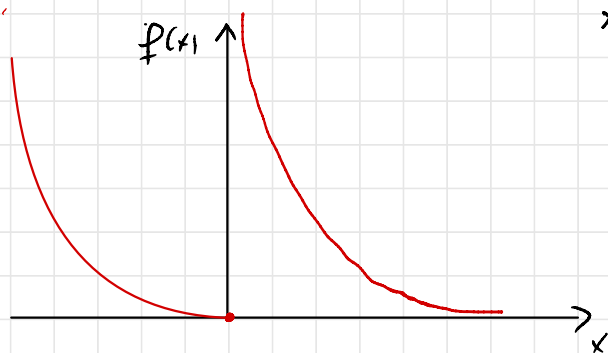
Es.: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$ è un punto di infinito:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$



④ Se almeno dei limiti unilateri **non esiste**, allora diciamo che x_0 è un punto di discontinuità di **seconda specie**.

Es.: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \nexists$$

$\Rightarrow x_0 = 0$ è un punto di discontinuità di 2° specie.

Esempio: Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x) + x^3}{2x + x^2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{e^{x^2} - \cos x + \sin(x^3)}{3x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

dove $x \in \mathbb{R}$

Determinare i valori di x per cui

$x_0 = 0$ risulta un punto di discontinuità eliminabile.

Calcolo il limite destro:

$$L_+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x) + x^3}{2x + x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x)}{2x(1+\frac{x}{2})} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{2x(1+\frac{x}{2})}$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+\frac{x}{2}}}_{1} \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x)}{x}}_{1} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2-x}}_{0}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Limite sinistro:

$$L_- = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{xx^2} - \cos x + \sin(x^3)}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{xx^2} - \cos x}{3x^2} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \underbrace{\frac{x}{3}}_0 \underbrace{\frac{\sin(x^3)}{x^3}}_1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{xx^2} - 1 + 1 - \cos x}{3x^2}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{xx^2} - 1}{x^2} + \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

Sost. $t = x^2$

$\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{3} \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{xt} - 1}{t}}_{1} + \frac{1}{6}$$

" (limite notevole)

$$\Rightarrow L_- = \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{6}$$

$$L_- = L_+ \Leftrightarrow \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \alpha = 1$$

Conclusione: $x_0 = 0$ è un p. di discontinuità eliminabile $\Leftrightarrow \alpha = 1$.

Esercizio assegnato: sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^2) + x^3}{3x + x^3} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{e^{-x^2} - \cos(\alpha x)}{x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui f è continua in $x_0 = 0$.

