



1, Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ e per ogni $q \in \mathbb{R}$ vale

$$\underline{1 - q^{n+1} = (1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^n)} \quad (1)$$

N.B.: se $q \neq 1$, l'eq. (1) implica

$$\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Dim.: applico il principio di induzione:

① per $n=1$ si ha

$$1 - q^{n+1} = 1 - q^2 = (1 - q)(1 + q)$$

$$(1 - q)(1 + \dots + q^n) = (1 - q)(1 + q) \quad \text{O.K.}$$

② Suppongo che valga l'eq. (1) e devo dimostrare che

$$1 - q^{n+2} = \underline{(1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1})}$$

scriviamo

$$\begin{aligned} 1 - q^{n+2} &= 1 - \underline{q \cdot q^{n+1}} + \underline{q} - q \\ &= q(1 - q^{n+1}) + 1 - q \end{aligned}$$

(1)

$$= q(1-q)(1+q+\dots+q^n) + 1-q$$

$$= (1-q) [q(1+q+\dots+q^n) + 1]$$

$$= \underline{(1-q)(1+q+q^2+\dots+q^{n+1})}$$

Oss.: per $n=2$ e $q=-x$, $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$1 - (-x)^3 = (1+x)(1-x+x^2)$$

$$\underline{1+x^3 = (1+x)(1-x+x^2)}$$

2) Dimostrare che per ogni $n \geq 0$ il numero

$$\underline{a_n = 1 + 2^{2^n} + 2^{2^{n+1}}} \text{ e'}$$

divisibile per 7.

Applico il principio di induzione:

① per $n=0$ si ha

$$a_0 = 1 + 2 + 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7$$

OK.

② Suppongo che a_n sia divisibile per 7 e devo dimostrare che anche

a_{n+1} è divisibile per 7.

Denoto $b = 2^{2^n}$

Quindi $a_n = 1 + b + 2^{2^n \cdot 2} = \underline{1 + b + b^2}$

$$a_{n+1} = 1 + 2^{2^n \cdot 2} + 2^{2^n \cdot 4} = 1 + b^2 + b^4$$

Uso l'eq. (1) con $n=2$ e con

i) $q = b$: $1 + b + b^2 = \frac{1 - b^3}{1 - b}$

ii) $q = b^2 \Rightarrow 1 + b^2 + b^4 = \frac{1 - b^6}{1 - b^2}$

Quindi

$$\begin{aligned} 1 + b^2 + b^4 &= \frac{1 - b^6}{1 - b^2} = \frac{(1 - b^3)(1 + b^3)}{(1 - b)(1 + b)} \\ &= \boxed{(1 + b + b^2)} \cdot \boxed{(1 - b + b^2)} \end{aligned}$$

$\in \mathbb{Z}$

è divisibile per 7

Quindi $1 + b^2 + b^4 = 1 + 2^{2^{n+1}} + 2^{2^{n+2}}$ è
divisibile per 7

Esercizi assegnati

- 1, Dimostrare che $\forall n \geq 1$
 $10^n - 1$ è divisibile per 9.
- 2, Dimostrare che $\forall n \geq 1$
 $n^3 + 5n$ è divisibile per 6.
- 3, Dimostrare la disuguaglianza di Bernoulli: $\forall x \geq -1$ e $\forall n \geq 1$
si ha
 $(1+x)^n \geq 1+nx$

Numeri complessi

1) Scrivere in forma algebrica il numero complesso

$$Z = \left(\frac{-\sqrt{3} + i}{1 + i} \right)^6$$

$$|-\sqrt{3} + i|^2 = 3 + 1 = 4$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3} + i = 2 e^{i\theta} \quad \text{dove}$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3} + i = 2 e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$|1 + i|^2 = 2 \Rightarrow 1 + i = \sqrt{2} e^{i\theta}, \quad \text{dove}$$

$$\cos \theta = \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{-\sqrt{3} + i}{1 + i} &= \frac{2 e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2} e^{i\pi\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{4}\right)} \\ &= \sqrt{2} e^{i\pi \frac{10-3}{12}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z = \left(\sqrt{2} e^{i \frac{7\pi}{12}} \right)^6 = \sqrt{2} e^{i\pi \frac{7}{12}}$$

$$= (\sqrt{2})^6 e^{i \frac{7\pi}{2}} = 8 \underbrace{e^{3i\pi}}_{-1} \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{i} = \underline{-8i}$$

Oss.:

$$\frac{-\sqrt{3} + i}{1 + i} = \frac{(-\sqrt{3} + i)(1 - i)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} (-\sqrt{3} + 1 + i(1 + \sqrt{3}))$$

$$= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + i \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \rho e^{i\theta}$$

$$\rho^2 = 1 + 1 = 2$$

$$\rho = \sqrt{2}$$

$$\theta = ? ?$$

non concludo nulla!

2) Calcolare le soluzioni di

$$\underline{iz^3 - 2 = 0} \quad z \in \mathbb{C}$$

$$z^3 = \frac{2}{i} = -2i \quad \left(\frac{1}{i} = -i \right)$$

$$= 2 e^{3\frac{\pi}{2}i}$$

Quindi : $z \in \{w_0, w_1, w_2\}$

$$\text{con } w_k = \sqrt[3]{2} e^{i \left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right)}$$

$$\Rightarrow w_0 = \sqrt[3]{2} e^{i \frac{\pi}{2}} = \underline{\sqrt[3]{2} i}$$

$$w_1 = \sqrt[3]{2} e^{i \frac{7\pi}{6}} = \sqrt[3]{2} \underbrace{e^{i\pi}}_{=-1} e^{i \frac{\pi}{6}}$$

$$= - \underline{\sqrt[3]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)}$$

$$w_2 = \sqrt[3]{2} e^{i \frac{11\pi}{6}} = \sqrt[3]{2} e^{-i \frac{\pi}{6}}$$

$$= \underline{\sqrt[3]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right)}$$

3) Determinare luogo geometrico di
tutti i $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\underline{|z - (3+i)| \leq 2} \quad (i)$$

e

$$\underline{\operatorname{Re}(z^2 + 7i) - (\operatorname{Re} z)^2 = 0} \quad (ii)$$

Scrivo $z = x + iy$

$$(i) \quad z - (3+i) = x-3 + (y-1)i$$

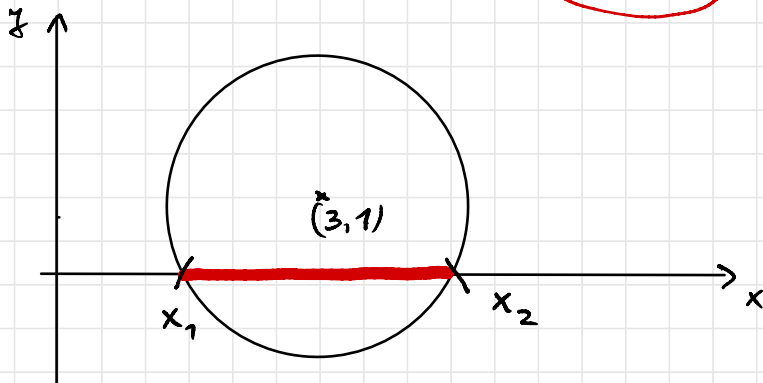
$$\Rightarrow |z - (3+i)|^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 \leq 4$$

=> cerchio di centro $(3, 1)$ e di raggio 2

$$\text{ii) } \underline{\operatorname{Re}(z^2 + 7i)} = \operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}((x+iy)^2) \\ = \operatorname{Re}(x^2 + 2ixy - y^2) = \underline{x^2 - y^2}$$

$$\underline{(\operatorname{Re} z)^2} = \underline{x^2}$$

$$\text{(iv) } \Rightarrow x^2 - y^2 - x^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \textcircled{y = 0}$$



x_1 e x_2 sono le soluzioni dell'eq.

$$(x-3)^2 + 1 = 4 \\ |x-3| = \sqrt{3} \Rightarrow x = \begin{cases} 3 - \sqrt{3} \\ 3 + \sqrt{3} \end{cases}$$

segmento $\{(x, 0) : 3 - \sqrt{3} \leq x \leq 3 + \sqrt{3}\}$

4, Scrivere in forma algebrica il numero

$$\underline{z = \left(\frac{2(i-1)}{1+i} \right)^4}$$

$$= 2^4 \left(\frac{i-1}{1+i} \right)^4 = 16$$

$$i-1 = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

$$1+i = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i} \Rightarrow \frac{i-1}{1+i} = e^{\frac{\pi}{2}i} = i$$

$$i^4 = 1$$

⇐

$$\underline{z = 2^4 = 16}$$

Esercizi assegnati

- 1, Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$|z - 3i|^2 + \operatorname{Re}(z + 6\bar{z}) \operatorname{Im}(z - \bar{z})i - (7i + 1)z\bar{z} \in \mathbb{R}$$

- 2, Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$z^4 - i|i - 1|^2 z = 0$$

- 3, Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$(z^3 + i)(z^2 + 4iz - 3) = 0$$